CRISTIANA-CAMELIA PESCARUS

UNE TARIFICATION NON LINÉAIRE ROBUSTE

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès arts (M.A.)

Département d'économique
FACULTÉ DES SCIENCES SOCIALES
UNIVERSITÉ LAVAL

OCTOBRE 2000

RÉSUMÉ

Ce mémoire s'attarde sur la théorie de la discrimination de deuxième degré en termes de prix (connue aussi sous le nom de tarification non linéaire) en y ajoutant des éléments nouveaux quant à l'ensemble des stratégies d'achat des consommateurs.

Les modèles standards de tarification non linéaire (Mussa et Rosen, 1978 ; Maskin et Riley, 1984 ; Tirole, 1988 ou Wilson, 1993) sont construits à partir d'hypothèses plus ou moins explicites qui restreignent les stratégies d'achat des consommateurs.

La structure du modèle que nous allons considérer est similaire à ceci près que les consommateurs disposent de plus de stratégies de déviation, i.e. ils procèdent à des achats multiples.

Une analyse similaire a été réalisée par Alger (1999) sous l'hypothèse que les consommateurs ont la possibilité d'acheter k fois le paquet offert par le monopoleur, où k est un nombre réel.

Notre principale contribution est de mener cette analyse dans le cas plus vraisemblable où k est un nombre naturel.

Cristiana-Camelia PESCARUS | Patrick GONZÁLEZ

Avant-Propos

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de recherche, M. Patrick González, pour ses nombreux conseils judicieux, sa patience, sa disponibilité et sa compréhension qui m'ont permis d'aboutir à la finalisation de ce travail de recherche sur un sujet d'un grand intérêt pour moi qui adore les preuves et les maths. Son soutien financier fut aussi énormément apprécié par toute ma petite famille. Je me considère très privilégiée d'avoir eu la chance de travailler avec lui.

Je tiens également à remercier le Fonds FCAR pour le financement de cette recherche.

Un grand merci à mes parents pour tous leurs sacrifices, leur aide financière et leur support moral. Une pensée spéciale s'adresse à mon père à qui je dois indirectement tous les A+ obtenus au long de mes études. Merci pour toutes les heures inoubliables et innombrables que nous avons passées à travailler ensemble. Tu as été un modèle pour moi et le meilleur prof que j'ai jamais eu.

Le plus spécial remerciement va vers mon époux, André, et mon fils, Marius, pour leur amour, leur soutien et leur confiance. Ils m'ont donné la motivation d'aller jusqu'au bout.

Finalement, je veux dédier ce mémoire à tous mes professeurs roumains qui m'ont formé pendant quinze années d'études dans mon pays. Si je finis aujourd'hui une maîtrise à l'Université Laval, c'est aussi grâce à leur travail extraordinaire. Je ne vous oublierai jamais.

Table des Matières

Introduction **1**

La discrimination en termes de prix **5**

2.1. La discrimination de premier degré 7

2.2. La discrimination de troisième degré 8

2.3. La discrimination de deuxième degré 10

Les modèles d'autosélection **14**

Un modèle de tarification non linéaire robuste **21**

4.1. Le modèle avec achat unique 23

Analyse graphique 24

Analyse algébrique 26

4.2. Le modèle avec achats multiples 29

4.3. Quand la robustesse intervient-elle ? 32

4.4. Le cas discret du modèle avec achats multiples 34

Conclusion **45**

Annexe A **46**

Références **48**

Chapitre 1

Introduction

Dans ce travail, nous élaborons plus en avant la théorie de la discrimination de deuxième degré en termes de prix en y ajoutant des éléments nouveaux quant à l'ensemble des stratégies d'achat des consommateurs. Ce type de discrimination est une pratique assez courante dans plusieurs industries : le prix par unité de bien homogène est fréquemment fonction de la quantité demandée ; un escompte, par exemple, peut être accordé pour un large volume d'achat.

La façon par laquelle la quantité achetée détermine le montant total payé par les consommateurs peut prendre plusieurs formes. Par exemple, dans la tarification du transport ferroviaire, le prix d'un kilogramme de marchandise transporté sur un kilomètre dépend du poids total, du volume et de la distance parcourue pour chaque cargaison. De plus, une tarification différente peut être appliquée si la cargaison doit être livrée dans un délai prescrit. Des dispositions similaires existent également dans l'industrie du transport routier ou aéroporté. Les compagnies de transport aérien offrent souvent des bonifications, telles que des billets gratuits, basées sur l'accumulation de « milles aériens ». La valeur unitaire de ces billets gratuits augmente plus que proportionnellement avec le nombre de « milles aériens » utilisés pour les acquérir.

Lorsque le prix est constant, le montant total payé par les consommateurs pour le bien ou pour le service reçu (le tarif) est une fonction linéaire de la quantité qu'il achète. Par contre, lorsque le prix moyen payé par unité homogène de bien dépend de l'intensité de la demande des consommateurs nous parlons de *tarification non linéaire*.

Les modèles standards de tarification non linéaire[1] sont calqués sur l'analyse marshallienne traditionnelle des marchés : le producteur établit un ensemble de prix et les

[1] Voir, par exemple, Mussa et Rosen, 1978 ; Maskin et Riley, 1984 ou Wilson, 1993.

consommateurs choisissent les quantités qu'ils désirent à ces prix. Quand la discrimination intervient, la tarification prend la forme de couples (q, t), où q représente la quantité et t le montant total à payer pour cette quantité (une tarification *uniforme* consiste en un prix constant $p = t/q$). Ces modèles sont construits à partir d'hypothèses plus ou moins explicites qui restreignent les stratégies d'achat des consommateurs. En particulier, il est facile de démontrer que la tarification non linéaire est impraticable si les consommateurs ont accès à un marché secondaire où la revente est permise. Afin d'illustrer que le producteur est en mesure d'empêcher la revente de ses produits, il est généralement supposé qu'il observe les achats des consommateurs et, en particulier, que ces derniers sont contraints de réaliser leur demande en un seul achat immédiatement suivi de la consommation.

Dans le modèle que nous allons considérer, nous conservons l'hypothèse d'absence de revente mais, en revanche, nous supposons que le producteur n'est pas en mesure de contrôler les achats des consommateurs. L'ensemble des stratégies des consommateurs devient alors très complexe ; ainsi, même si le producteur discriminant est en mesure d'empêcher l'émergence d'un marché secondaire (la revente entre les consommateurs), il se peut qu'il soit toutefois incapable de contrôler les quantités acquises au total par chaque consommateur au terme d'achats répétés. Le producteur fixe une tarification, éventuellement complexe, et les consommateurs sont alors libres d'exploiter cette tarification à leur convenance en combinant plusieurs éléments de cette tarification grâce à des achats répétés.

Même si le producteur est en mesure de contrôler les achats des consommateurs, il n'est pas sûr qu'il soit optimal de déployer de coûteuses ressources de surveillance en ce sens. En effet, la discrimination de deuxième degré fonctionne dans la mesure où le producteur est capable de s'engager à une tarification fixe et non renégociable. Étant donné que cette tarification détermine l'achat d'une quantité inefficace pour certaines catégories de consommateurs (telle que les taux marginaux de substitution des consommateurs et de substitution technique de la firme diffèrent), le producteur sera tenté de renégocier avec certains consommateurs une fois que ceux-ci ont signalé leur demande en choisissant un couple « prix – quantité ». Cette renégociation, au bénéfice des deux parties, est très difficile à proscrire par contrat *ex ante.* Si elle est anticipée, cette possibilité de renégociation peut annuler les incitations déterminées par la tarification. Donc, le producteur cherchera à assurer son pouvoir de marché par la définition d'une tarification fixe qu'il protégera de son mieux contre toute possibilité de renégociation (conjecture de Coase). Couramment, par exemple, les ventes sont confiées à une troisième partie – un distributeur. Celui-ci représente un tampon entre le producteur et les consommateurs, ce qui rend la renégociation très difficile. Par contre, le distributeur ne bénéficiera pas de la rente générée par la tarification et par conséquent, n'a généralement aucune incitation à prévenir les consommateurs d'acheter plusieurs fois. En définitive, en essayant de se protéger contre la renégociation, le producteur perd le contrôle sur les quantités achetées par chaque consommateur. Une tarification optimale est susceptible de procéder à un arbitrage non trivial entre ces deux effets.

À titre d'exemple, considérez le cas des grands supermarchés qui offrent souvent des rabais pour certains produits tout en limitant par contre la quantité que les consommateurs peuvent en acheter. Une fois la limite imposée par le supermarché dépassée, le prix unitaire augmente avec la quantité achetée. Les supermarchés offrent ces rabais afin d'attirer les consommateurs. Même s'ils font des pertes sur les produits offerts en rabais, ils comptent en gagner sur l'ensemble des achats des consommateurs. Mais ils ne peuvent pas permettre à un consommateur d'acheter une grande quantité exclusivement du produit en rabais car ils feraient alors certainement des pertes. Étant donné que les ventes sont anonymes, le consommateur pourrait potentiellement revenir acheter plusieurs fois afin d'obtenir la quantité désirée en payant le prix réduit mais cela génère bien sûr des coûts qui pourraient s'avérer prohibitifs.

Nous pensons que l'intégration d'un ensemble de stratégies plus riche pour les consommateurs donnera des résultats significativement différents de ceux trouvés dans l'analyse standard de la tarification non linéaire.

Une analyse similaire quoique simplifiée a été réalisée par Ingela Alger (1999) qui caractérise une liste de paquets (combinaisons prix – quantité) offerts par le monopoleur lorsque les consommateurs peuvent acheter plusieurs paquets ou acheter un paquet conjointement avec d'autres consommateurs ou les deux dans une situation où il y a seulement deux types des consommateurs. Alger montre que même si l'arbitrage parfait empêche toute forme de discrimination en termes de prix, l'arbitrage partiel (soit les achats multiples, soit les achats conjoints) peut conduire le monopoleur à appliquer une discrimination en termes de prix encore plus prononcée. Dans son analyse, Alger suppose que les consommateurs peuvent pratiquer les achats multiples en achetant n'importe quel nombre *réel* de paquets. Notre principale contribution est de faire cette analyse dans le cas discret, où le nombre d'achats est un nombre naturel, qui est beaucoup plus proche de la réalité.

Non seulement les modèles existants seront raffinés (un point important étant donné l'intérêt croissant de tester empiriquement le comportement du producteur en matière de prix) mais cette analyse apportera des connaissances normatives précieuses pour ceux qui pratiquent ces techniques.

Ce travail est divisé comme suit. Dans la première section nous présentons de façon générale la discrimination en termes de prix en insistant particulièrement sur celle de deuxième degré. Dans la seconde section, nous procédons à un bref survol des modèles d'autosélection auxquels s'apparente le modèle que nous développons. Le modèle est ensuite présenté et nous introduisons la notion de *robustesse* d'une allocation que nous exploiterons. Deux exemples numériques seront proposés.

Chapitre 2

La discrimination en termes de prix

Il y a *discrimination en termes de prix* lorsque le producteur peut vendre différentes unités d'output à des prix différents. Il est fréquent que le même produit ou le même service soit vendu à des prix différents à différents consommateurs. Par exemple, dans un système de santé privé, le montant payé par un patient à son médecin peut dépendre du fait que le patient est riche ou pauvre, assuré ou non. Le prix du même bien peut varier d'une région à l'autre sans que ces différences de prix soient justifiées par des différences significatives dans les coûts de production. De plus, lorsque le producteur offre un escompte en fonction de la quantité achetée, le même bien peut être vendu à des prix différents au même consommateur.

De manière générale, le producteur pratique la discrimination en termes de prix dans le but de s'approprier la plus grande partie du surplus des consommateurs et d'accroître ainsi ses profits. Les définitions formelles de la discrimination en termes de prix abondent. Nous retiendrons celle de Tirole (1988) :

> *Le producteur discrimine en termes de prix quand deux unités du même bien physique sont vendus à des prix différents, soit au même consommateur, soit à des consommateurs différents.*

Évidemment, cette définition exclue le cas où les différences en termes de prix entre les consommateurs reflètent des différences dans les coûts engendrés par le fait de servir ces consommateurs. Tirole évoque le cas d'un producteur de ciment qui dessert un certain territoire et qui est intégré verticalement (il offre aussi le transport pour sa marchandise).

Dans une telle situation, un prix uniforme est discriminatoire alors qu'un prix qui reflète les différences de coût de transport à des clients plus ou moins éloignés de l'usine ne l'est pas.[2]

La capacité d'un producteur de discriminer sa clientèle est directement reliée à *la capacité d'arbitrage* des consommateurs. Nous distinguerons entre deux types d'arbitrage.

Le premier type d'arbitrage est associé à *la possibilité de transfert de la marchandise*. Si les coûts d'arbitrage entre les consommateurs sont négligeables et que le producteur pratique la discrimination, les consommateurs pouvant acheter à un prix bas revendront le produit à ceux qui ne peuvent l'avoir que pour un prix élevé. Ils sont alors en mesure de s'approprier une partie du surplus qu'espérait récolter le producteur. Par exemple, quand le producteur offre un escompte en fonction de la quantité achetée, seul le consommateur bénéficiant du prix le plus bas achètera le produit, directement du producteur, et il le revendra ensuite aux autres consommateurs à un prix marginalement inférieur à celui demandé par le producteur à ces consommateurs. Donc, si l'arbitrage entre les consommateurs est parfait, le producteur doit nécessairement recourir à une tarification uniforme. Ce sont les coûts de transaction entre consommateurs qui nous indiqueront si la discrimination en termes de prix est faisable ou non. Ce type d'arbitrage est impossible dans le cas des services non transférables, tels que les services médicaux personnalisés.

Le second type d'arbitrage est associé avec *la possibilité de transfert de la demande* entre différents couples (q, t) offerts aux consommateurs par le producteur. Dans ce cas, il n'y a aucun transfert physique de biens entre les consommateurs. Les consommateurs choisissent tout simplement entre les différents couples offerts : « prix – quantité ». Si les goûts des consommateurs diffèrent, le producteur essaie d'établir un couple « prix – quantité »[3] pour chaque consommateur.

[2] La discrimination est aussi possible lorsque des produits différenciés sont vendus à différents consommateurs. Le producteur peut offrir différentes qualités du service dans le but d'avoir une meilleure information sur les préférences des consommateurs et, par conséquent, réussir à s'approprier leur surplus en les séparant en groupes distincts.

[3] Ou «prix - qualité » cf. Mussa & Rosen (1978).

En situation *d'information complète,* c'est-à-dire lorsque le producteur est en mesure d'observer les préférences de chaque consommateur, une telle discrimination parfaite (dite de premier degré) est possible. En *information incomplète,* si, par exemple, le producteur ne connaît que la distribution des préférences, il doit s'assurer que chaque consommateur choisira de fait le couple (q, t) qui a été conçu pour lui et non celui conçu pour un autre consommateur. Dans l'exemple précédent, tout consommateur serait en mesure d'obtenir le meilleur prix en prétendant être doté des préférences associées à ce meilleur prix.

Par rapport à leurs implications sur la discrimination, les deux types d'arbitrage évoqués sont très différents. La possibilité de transfert de la marchandise a tendance à empêcher la discrimination alors que la possibilité de transfert de la demande peut inciter le producteur à accentuer la discrimination.

2.1. La discrimination de premier degré

Pigou (1920) distingue trois types de discrimination en termes de prix. Le modèle que nous développons plus loin illustre une forme particulière de discrimination de deuxième degré. Nous présenterons ici, au préalable, les deux autres types de discrimination.

Il y a discrimination au premier degré (ou *discrimination parfaite*) lorsque chaque unité marginale est vendue au consommateur qui a la plus forte propension marginale à payer. Si nous faisons abstraction du problème de négociation des échanges, en supposant que le producteur est en mesure d'en imposer les termes, le producteur exigera le prix maximum que ce consommateur est disposé à payer pour cette unité. Le producteur parvient ainsi à s'accaparer la totalité du surplus des consommateurs.

Le niveau d'output obtenu est efficace au sens de Pareto, tout comme dans le cas de la concurrence parfaite. Un producteur qui discrimine parfaitement en termes de prix doit produire un niveau d'output pour lequel le prix égale le coût marginal : si le prix est supérieur au coût marginal, cela signifie qu'il existe une personne disposée à payer un montant supérieur au coût de production pour une unité supplémentaire d'output et, par conséquent, que le producteur devrait produire cette unité supplémentaire et la vendre à cette personne. Quoique la somme des surplus du producteur et des consommateurs soit maximisée[4], c'est le producteur qui bénéficie de la totalité du surplus social, alors que l'allocation est inversée dans le cas de la concurrence parfaite.

La discrimination parfaite est surtout un concept théorique, au demeurant fort intéressant du point de vue analytique, car elle constitue un système d'allocation des ressources différent de la concurrence parfaite mais qui réalise aussi une allocation efficace au sens de Pareto.

En pratique, il existe très peu d'exemples concrets de discrimination parfaite. Le producteur peut discriminer parfaitement si, par exemple, les consommateurs ont des demandes unitaires (ils consomment une seule unité ou rien) et le producteur connaît exactement le prix de réserve de chaque consommateur (le prix maximal que le consommateur est prêt à payer pour avoir le bien). Le producteur fixera un prix individualisé pour chaque consommateur et ce prix individualisé sera égal au prix de réserve de chaque consommateur.

2.2. La discrimination de troisième degré

C'est la forme la plus fréquente de discrimination en termes de prix. Si le producteur peut observer certains signaux liés aux préférences des consommateurs (l'âge, la profession, la localisation, etc.) et s'il peut utiliser ces signaux pour discriminer en termes de prix, nous parlons de la discrimination de troisième degré. En se basant sur cette information, le producteur est en mesure de répartir la demande agrégée en m « groupes » ou « marchés » auxquels il peut assigner des prix différents. Cependant, la tarification demeure uniforme dans chaque groupe.

[4] Une condition équivalente à l'efficacité au sens de Pareto dans le cas où les préférences des consommateurs sont quasi-linéaires.

Ce type de tarification est courant comme en témoigne par exemple les tarifs préférentiels offerts aux personnes âgées et aux étudiants. Les rabais offerts par les producteurs aux étudiants et aux personnes âgées ne reflètent généralement aucune intention redistributive mais plutôt la perception du producteur de l'élasticité de la demande de chacun de ces groupes. Le producteur discriminant cherchera à pratiquer un prix faible pour les consommateurs sensibles au prix et un prix élevé pour ceux qui sont relativement insensibles au prix (la règle de Ramsey).

La discrimination de troisième degré explique aussi pourquoi le prix des services médicaux et légaux est fixé en fonction du revenu du client ou du montant couvert par l'assurance ; le fait que le prix régional des biens ne reflète pas toujours les coûts de transport et les taxes d'importation ; ou le fait que les nouveaux abonnés à une revue peuvent bénéficier d'un rabais.

Le producteur profite toujours de la discrimination puisqu'il accroît ainsi l'ensemble des instruments dont il dispose (les prix) pour extraire le surplus des consommateurs (si cela s'avère optimal, le producteur peut toujours appliquer un prix uniforme sur tous les marchés comme un cas dégénéré de discrimination de troisième degré). Par rapport à une tarification uniforme, la discrimination de troisième degré affecte différemment l'utilité des consommateurs selon l'élasticité de leur demande. Ceux dont l'élasticité de la demande est faible doivent payer un prix relativement plus élevé ; ils préféreraient donc un régime de prix uniforme. En revanche, les consommateurs dotés d'une forte élasticité de la demande préféreront une tarification discriminatoire puisqu'ils obtiennent ainsi un prix plus faible.

La discrimination de troisième degré redistribue le surplus social au profit du producteur et des consommateurs à forte élasticité. Cependant, contrairement à la discrimination parfaite, elle réduit l'ampleur du surplus social si l'output total n'augmente pas. La discrimination de troisième degré fait en sorte que le taux marginal de substitution diffère d'un consommateur à l'autre et, par conséquent, si le but suivi est de distribuer une certaine quantité de bien entre les consommateurs, le surplus social sera inférieur comparativement au cas du prix uniforme. Donc, une condition nécessaire pour que la discrimination de troisième degré soit préférée du point de vue social au prix uniforme est que l'output total augmente. En général, la discrimination de troisième degré permet au producteur d'accroître l'output sans diminuer ses profits en vendant sa production excédentaire (par rapport à son niveau de production sous une tarification uniforme) à un prix plus faible aux consommateurs à forte élasticité. D'autre part, en autorisant de plus larges profits, elle peut rendre compatibles viabilité financière et efficacité de la production dans le cas des entreprises produisant dans la partie décroissante de leur courbe de coût moyen.

En définitive, les effets de la discrimination de troisième degré sur le bien-être global demeurent ambigus parce qu'ils incluent des effets redistributifs importants. On doit comparer les pertes subies par les consommateurs dotés d'une élasticité peu élevée versus les gains obtenus par les consommateurs dotés d'une forte élasticité et l'accroissement des profits du producteur. Par exemple, l'interdiction légale de la discrimination peut être inappropriée si cela conduit à la fermeture de certains marchés : l'imposition d'offrir un prix uniforme entraîne une augmentation de prix pour les consommateurs dotés d'une élasticité élevée et une diminution de prix pour ceux dotés d'une élasticité faible ; un prix plus élevé pour les consommateurs avec une forte élasticité peut les conduire à ne plus acheter le bien.

2.3. La discrimination de deuxième degré

Comme nous l'avons déjà mentionné, la discrimination de deuxième degré est aussi connue sous le nom de tarification non linéaire : le prix par unité d'output n'est pas constant mais dépend de la quantité totale achetée. Cette forme de discrimination est fréquemment utilisée dans le cas de services publics comme l'électricité, mais on la retrouve également dans tous les cas où le producteur est en mesure de contrôler, au moins en partie, la revente de son produit. Les structures de tarification des parcs d'attraction ou des stations de ski, par exemple, comportent fréquemment des éléments apparentés à la discrimination de deuxième degré.

Couramment, un escompte est offert soit sous la forme d'un prix plus bas pour les unités marginales, soit sous la forme d'un prix plus bas pour toutes les unités si la quantité achetée est suffisamment grande. Cependant, il n'est pas rare qu'un escompte soit accordé pour des achats de petite quantité comme en témoigne la vogue des échantillons – essais.

On peut concevoir abstraitement ce type de tarification de la manière suivante : le producteur offre un *menu* de couples (q, t) différents parmi lesquels chaque consommateur peut librement choisir celui qu'il préfère. En général, pour que l'introduction de la tarification non linéaire soit possible, trois conditions doivent être satisfaites :

- le producteur doit disposer d'un certain pouvoir de monopole afin d'être en mesure de fixer ses prix au-dessus du coût marginal ;
- la revente sur le marché doit être très limitée, absente ou contrôlée par le producteur ;
- le producteur doit pouvoir contrôler les achats des consommateurs.

Par ailleurs, afin de pouvoir tirer avantage d'une tarification non linéaire, le producteur aura intérêt à connaître au moins la distribution agrégée des préférences des consommateurs.

Le recours à une tarification non linéaire est motivé, d'une part, par l'hétérogénéité des préférences de l'ensemble des consommateurs. Elle permet une allocation plus efficace des biens produits puisque les consommateurs peuvent adapter leurs achats en fonction de leurs préférences. D'autre part, la tarification non linéaire peut être aussi utile afin d'exploiter des économies d'échelle. La tarification non linéaire est fréquente même sur les marchés concurrentiels. Par exemple, les journaux et les magazines offrent souvent des escomptes pour attirer les clients qui y font la publicité de leurs produits. Sinon ceux-ci utiliseraient des services substituts disponibles comme la télévision.

Le plus simple exemple de tarification non linéaire est le tarif affine en deux parties : le consommateur paie initialement des frais fixes pour la première unité achetée (souvent justifiés comme étant des frais d'abonnement, d'accès ou d'installation) plus un prix constant pour chaque unité supplémentaire achetée (la partie variable du tarif). Nous avons donc, $t(q) = A + pq$ où A représente les frais fixes. Le tarif en deux parties ressemble beaucoup à un escompte : le prix moyen du bien ($p_m = \frac{A}{q} + p$) décroît avec le nombre q d'unités achetées.

Le tarif en deux parties est souvent utilisé lorsque le producteur offre des biens complémentaires. Par exemple, un rasoir et les lames ou un appareil photo et les films. Le producteur qui offre des rasoirs et des lames vend le rasoir à un prix et les lames à un autre mais le prix qu'il fixe pour les lames influence la demande pour les rasoirs et vice versa. En fait, dans la mesure où seul un rasoir doté d'une lame constitue un bien économique à valeur positive, le prix du rasoir représente les frais fixes, alors que le prix des lames (lesquelles peuvent être consommées en quantités différentes en fonction de l'intensité de la demande des consommateurs) constitue la partie variable.

Un autre exemple de tarif en deux parties est celui d'un parc d'attractions. Les consommateurs doivent souvent payer un prix pour les billets d'entrée au parc et un autre prix pour les attractions. Le prix que les consommateurs sont disposés à payer pour entrer dans le parc dépend du prix qu'ils devront payer pour les attractions.

La raison principale de la popularité du tarif en deux parties est sa simplicité. Ainsi il est souvent possible de reproduire l'allocation induite par une tarification très complexe à l'aide de *menus* de tarifications affines.

En discriminant au troisième degré, le producteur est capable de diviser le marché en *m* classes des consommateurs en se basant sur des signaux directs, mais il n'est pas capable de discriminer entre les consommateurs du même groupe (soit à cause de la demande unitaire, soit à cause de l'arbitrage). Dans le cas de la discrimination de deuxième degré, le monopoleur connaît la distribution des préférences des consommateurs dans un groupe mais il ne connaît pas les préférences de chaque consommateur pris individuellement. Par conséquent, le producteur va structurer la tarification de manière telle que les consommateurs révèlent d'eux-mêmes cette information par leurs choix. Puisqu'elle fait intervenir une révélation endogène d'information, la discrimination de deuxième degré est souvent représentée sous la forme d'un jeu Bayesien (i.e. un jeu où les préférences de certains joueurs sont inconnues des autres joueurs mais où les *a priori* bayesiens des joueurs non informés sont de connaissance commune parmi tous les joueurs). Dans la section suivante, nous décrivons la classe des modèles d'autosélection qui ont été développés pour analyser cette situation.

Chapitre 3

Les modèles d'autosélection

Les modèles d'autosélection représentent l'une des grandes familles de modèles de la théorie des contrats. Ils s'appliquent pour modéliser des situations d'échange où l'asymétrie d'information entre les agents économiques joue un rôle important.

Par exemple,

- en assurance-vie, les assurés sont mieux informés de leur état de santé (et donc, de leur risque de décès) que l'assureur.
- les banques font face à des emprunteurs dont elles ne peuvent cerner qu'imparfaitement les risques de faillite.
- l'État, qui établit le cadre légal des entreprises publiques, est moins informé que celles-ci sur leur productivité ou leur structure de coûts.

Si nous analysons le modèle d'équilibre général en tant qu'instrument descriptif, nous réalisons rapidement qu'il présente plusieurs limites :

- les agents n'interagissent que par l'intermédiaire du système de prix sur lequel ils n'ont aucune influence ;
- nous ne trouvons nul part une description de l'organisation des institutions qui régissent les relations économiques (les entreprises sont tout simplement réduites à un ensemble de production) ;
- les asymétries d'informations jouent seulement un rôle passif.

Depuis toujours, les économistes ont reconnu la formidable complexité des allocations efficaces et l'ampleur de la quantité d'information nécessaire pour les identifier. Dans un équilibre de marché concurrentiel parfait, le mécanisme de prix est suffisant pour identifier une telle allocation et inciter les agents économiques à l'implanter. Hors de ce paradigme, les problèmes d'information retrouvent toute leur acuité. Cette prise de conscience a conduit à la naissance de la théorie des contrats dans les années soixante-dix (également appelée *l'économie de l'information*) et, plus particulièrement, au développement du modèle dit de « Principal – Agent ».

Les modèles de la théorie des contrats présentent généralement les caractéristiques suivantes :

- Ce sont, pour la plupart, des modèles d'équilibre partiel.
- Ils décrivent les interactions d'un petit nombre d'agents, souvent deux comme dans le cas du modèle de Principal – Agent élémentaire.
- Ils résument les propriétés du cadre institutionnel prévalant à travers un *contrat* qui peut être *explicite* (un document signé garanti par un tribunal ou par le désir qu'ont les agents de maintenir leur bonne réputation) ou *implicite* (un système de normes de comportement).
- Ces modèles font une utilisation intensive de la théorie des jeux en information asymétrique (le modèle Principal – Agent). Les parties ont une croyance commune *a priori* sur l'information dont elles ne disposent pas et révisent cette croyance au fur et à mesure du déroulement du jeu.

Le modèle Principal – Agent met en relation deux agents économiques : *la partie informée*, qui détient une information pertinente pour la bonne conduite des échanges et qui est appelée l'Agent et *la partie non informée* qu'on appelle le Principal. Dans les modèles d'autosélection, la partie non informée (le Principal) ne connaît qu'imparfaitement les caractéristiques de la partie informée (l'Agent). Par contre, c'est le Principal qui a l'initiative et propose le contrat. Dans le cas de la discrimination de deuxième degré, le producteur (la partie non informée) offre un *menu* des couples (q, t) et le consommateur (la partie informée) choisit celui qu'il préfère.

Nous proposons l'exemple suivant (que nous analyserons plus loin) inspiré par Salanié (1994) : le principal est un marchand de vin et l'agent, un acheteur. L'agent peut consommer le vin en grande quantité ou non, selon l'intensité relative de sa demande. Il y a donc deux *types* d'agents : un agent qui est prêt à dépenser beaucoup pour consommer du vin (l'agent de type 2) et un agent qui aime moins le vin ou qui dispose d'un portefeuille plus modeste (l'agent de type 1). Le principal n'est pas capable de distinguer entre les deux types d'agent.

Étant donné que l'agent de type 2 est prêt à dépenser plus que l'agent de type 1 pour consommer du vin, le principal segmentera le marché en offrant deux quantités de vin :

- une quantité q_1 pour un tarif à débourser t_1,
- une quantité q_2 pour un tarif t_2,

avec $q_2 > q_1$ et $t_2 > t_1$.

L'agent de type 2 choisira (q_2, t_2) et l'autre (q_1, t_1). On dit que les deux types d'agent se sont révélés par leur choix de quantité.

La *théorie des mécanismes de révélation* est à la base de l'étude des modèles d'autosélection. Dans ses grandes lignes, elle fonctionne comme suit :

- n agents $i = 1, \ldots, n$ caractérisés par un vecteur de paramètres θ_i | Θ_i qui constitue l'information privée de chaque agent et qu'on appelle souvent leur *type.*
- un *centre* qui cherche à implanter une allocation des ressources aussi « bonne » que possible[5], allocation qui dépend des caractéristiques θ_i des agents.

Pour parvenir à ses fins, le centre impose un mécanisme : ($y(.)$, M_1, …, M_n) qui se compose d'un espace de messages M_i pour chaque agent i et d'une fonction $y(.)$ de $M_1 \leftrightarrow .. \leftarrow M_n$ dans l'espace des allocations. La fonction $y(.) = (y_1(.),\ldots, y_n(.))$ détermine les allocations des n agents en fonction des messages qu'ils ont envoyés. Ces allocations sont généralement des vecteurs.

Les agents, connaissant la fonction $y(.)$, jouent un jeu d'annonces où les espaces M_i sont leurs ensembles de stratégies et la fonction $y(.)$ détermine l'allocation finale et donc, leurs utilités. À l'équilibre du jeu[6], l'agent i choisit un message m_i^* dans M_i et l'envoie au

[5] Le centre peut être une institution bénévole, comme le gouvernement, qui cherche à maximiser le surplus social ou un organisme privé, comme un monopole, qui cherche à maximiser ses profits.

[6] Les concepts d'équilibre retenus dans la littérature varient. On distingue notamment les *mécanismes en stratégies dominantes* qui sont construits de manière telle que les croyances des individus n'influencent pas l'allocation finale et les *mécanismes en stratégies bayesiennes* qui reposent sur l'établissement d'un système de croyances satisfaisant la règle de Bayes.

centre qui impose alors l'allocation $y(m_1^*, \ldots, m_n^*)$. Dans notre exemple, l'acheteur choisit la quantité qu'il désire acheter et paie le prix établi par le producteur pour cette quantité.

En général, le message choisi par l'agent i dépendra de son information I_i, qui comprend sa caractéristique θ_i mais peut être plus riche (ce sera le cas, par exemple, si les types des agents ne sont pas indépendants). Les messages d'équilibre seront donc des fonctions $m_i^*(I_i)$ et l'allocation mise en œuvre sera

$$y^*(I_1,\ldots, I_n) = y(m_1^*(I_1),\ldots, m_n^*(I_n)).$$

Les modèles qui nous intéressent constituent un cas particulier de la théorie générale des mécanismes. Le principal y joue le rôle du centre et l'information I de l'agent se réduit à son type θ.

Compte tenu du mécanisme $(y(.), M)$, l'agent choisit son annonce de manière à maximiser son utilité $u(y,\theta)$:

$$m^*(\theta) \in \arg\max_{m_i \in M_i} u(y(m), \theta)$$

et il obtient donc l'allocation

$$y^*(\theta) = y(m^*(\theta)).$$

Par le *principe de révélation*[7], nous pouvons nous limiter, sans perte de généralité, à ne considérer que des mécanismes *directs* où l'espace des messages est limité à Θ_i pour chaque agent en autant que l'allocation proposée satisfasse les contraintes dites « d'incitation » (IC). Ces contraintes assurent que l'agent n'a rien à gagner en mentant à propos de son type θ_i.

Reprenons l'exemple du marchand de vin qui offre différentes quantités de vins pour différents prix afin d'extraire une plus grande partie du surplus des consommateurs dont les goûts diffèrent. L'utilité de l'agent est $U = \theta q - t$, où q est la quantité achetée et θ représente l'utilité marginale du vin. Deux valeurs de θ sont possibles : $\theta_1 < \theta_2$ où θ_2 est le type des consommateurs qui achètent en grande quantité ; la probabilité *a priori* que l'agent soit de

[7] Pour plus d'information sur le *principe de révélation* voir Salanié (1994).

type 1 (ou la proportion de *type* 1 dans la population) est λ. Si nous fixons deux couples (U_1,θ_1) et (U_2,θ_2), nous obtenons un système linéaire en (q, t).

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & -1 \\ \theta_2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Puisque $\theta_1 \neq \theta_2$, ce système est inversible et n'a qu'une seule solution.

Par conséquent, les courbes d'indifférence des différents types d'agent ne se croisent qu'une fois dans le plan (q, t)[8]. À quantité égale, les consommateurs de type 2 sont prêts à payer plus pour un accroissement de quantité que ceux de type 1.

Le principal est un monopole local sur le marché du vin doté d'une fonction de coût $C(q)$. Nous supposons que C est deux fois différentiable et strictement convexe, de même que $C'(0) = 0$ et $C'(\infty) = \infty$.

Le principal cherche à maximiser ses profits, soit la différence entre ses recettes et ses coûts de production $t - C(q)$.

Le déroulement de l'échange entre le principal et l'agent est le suivant :

1. Le principal propose un menu de tarification $(q(\theta), t(\theta))$ à l'agent ;
2. L'agent accepte ou refuse la tarification. Un refus met fin à l'échange.
3. L'agent envoie un message m à propos de son type.
4. L'agent achète $q(m)$ contre un transfert $t(m)$.

Si le principal pouvait observer le type θ de l'agent ou s'il était persuadé que l'agent choisirait toujours de dire la vérité en toutes circonstances, le principal offrirait un contrat tel que, pour tout θ,

$$(q(\theta), t(\theta)) \arg\max_{q,t}\ t - C(q)$$

$$\text{sous la contrainte : } \theta q - t \geq 0.$$

Un tel contrat implique que la production est efficace puisque le coût marginal de production $C'(q)$ sera égal à l'utilité marginale de l'agent θ. Par ailleurs, l'agent obtient une utilité de 0 de sorte que le principal parvient à s'accaparer tout le surplus social. Ce contrat optimal, en fait, constitue un exemple de discrimination parfaite.

Ici, on suppose que le principal connaît λ mais ignore le véritable type de l'agent. Il est facile de voir que le contrat précédent ne parviendra plus à implanter l'allocation efficace choisie par le principal. En effet, puisque $\theta_1 q_1 - t_1 = 0$ et que $\theta_2 > \theta_1$, nous avons immédiatement que :

$$\theta_2 q_1 - t_1 > 0 = \theta_2 q_2 - t_2.$$

Donc, l'agent de type θ_2 aura toujours intérêt à rapporter une valuation marginale de type θ_1. Le mécanisme n'est pas autosélecteur et n'induit pas la révélation des préférences.

Parmi toutes les allocations possibles, le principal devra donc se restreindre à celles qui respectent les contraintes dites d'*incitation*.

Dans ce contexte, le problème du principal devient le suivant :

$$\max_{t_1, q_1, t_2, q_2} \quad (\lambda(t_1 - C(q_1)) + (1 - \lambda)(t_2 - C(q_2)))$$

sous les contraintes :

- $\theta_1 q_1 - t_1 \geq \theta_1 q_2 - t_2,$ (IC$_1$)
- $\theta_2 q_2 - t_2 \geq \theta_2 q_1 - t_1,$ (IC$_2$)
- $\theta_1 q_1 - t_1 \geq 0,$ (IR$_1$)
- $\theta_2 q_2 - t_2 \geq 0.$ (IR$_2$)

Les inégalités (IC) sont les contraintes d'*incitation* qui spécifient que chaque consommateur préfère toujours choisir le contrat qui lui est destiné. Les inégalités (IR) sont les contraintes de *participation* qui assurent que les consommateurs acceptent le mécanisme proposé par le principal puisqu'il obtient ainsi une utilité au moins égale à celle qu'il aurait pu s'assurer en refusant la tarification à l'étape 2 du jeu.

Nous allons montrer dans le chapitre suivant qu'à l'optimum :

- (IR$_1$) est serrante et donc que $t_1 = \theta_1 q_1$;
- (IC$_2$) est serrante et que

$$t_2 - t_1 = \theta_2(q_2 - q_1) ;$$

- $q_2 \geq q_1$;
- nous pouvons négliger (IC$_1$) et (IR$_2$) ;

[8] Cette condition générale est appelée la condition de Spence-Mirrlees ou encore la condition de *single crossing.*

- les consommateurs de type θ_2 achètent une quantité efficace, alors que la quantité vendue aux consommateurs de type θ_1 est sous-efficace.

Le contrat optimal possède cinq propriétés qui sont très générales dans tous les modèles discrets :

- les consommateurs de type θ_2 reçoivent une allocation efficace, sont indifférents entre les deux contrats et obtiennent un surplus positif qui constitue leur *rente informationnelle* ;
- les consommateurs de type θ_1 reçoivent une allocation sous-efficace et ont un surplus nul.

La rente informationnelle est un concept essentiel dans les modèles d'autosélection. L'agent de type θ_2 en bénéficie parce qu'il peut toujours se faire passer pour le type θ_1, choisir (q_1, t_1) et recevoir ainsi l'utilité $q_1\theta_2 - t_1$ qui est strictement positive. En revanche, le type θ_1 n'a rien à gagner à se faire passer pour le type θ_2 ; ce faisant, il obtiendrait l'utilité $q_2\theta_1 - t_2$ qui est négative.

L'analyse générale de ce type de problème enseigne qu'il existe un arbitrage entre efficacité économique (obtenue par la révélation des préférences) et la maximisation des profits du principal. En octroyant des rentes informationnelles, le principal accroît l'efficacité (il augmente la taille de la tarte) mais il concède, de cette façon, davantage de surplus à l'agent (sa propre part de la tarte diminue).

Chapitre 4

Un modèle de tarification non linéaire robuste

Notre analyse a été inspirée par le modèle de Tirole (1988) que nous modifierons en tenant compte de stratégies plus complexes des consommateurs, telles que les achats répétés. Nous sommes intéressés par une situation dans laquelle le monopoleur aimerait fixer un prix unitaire plus grand pour un consommateur doté d'une demande forte que pour un consommateur doté d'une demande faible. Ce phénomène est connu dans la littérature sous le nom de *quantity premia*. Dans une situation de quantity premia, le consommateur doté d'une demande forte peut avoir intérêt à acheter plusieurs fois le paquet offert au consommateur doté d'une demande faible et à stocker la marchandise afin de payer moins cher.

En pratique nous retrouvons plusieurs cas où la situation décrite dans le modèle pourrait s'appliquer. Nous proposons ci-dessous quatre applications naturelles aux cas de l'électricité, des terrains immobiliers, de l'eau et des échantillons de biens, notamment des logiciels.

Considérons le cas de l'électricité. Pour décourager la consommation pendant les périodes de pointe le prix du kWh augmente avec la quantité consommée. *A priori*, il peut sembler que dans cette situation le problème des achats multiples ne se pose pas puisque l'électricité est un bien non-stockable : il est physiquement impossible d'acheter plusieurs fois des petites quantités pour arriver à une quantité désirée plus importante. Toutefois, le consommateur peut tout même tricher d'une autre façon : il peut produire des biens lorsque l'énergie est peu coûteuse et les stocker.

Takatoshi Tabuchi (1996) a traité de la discrimination de deuxième degré en termes de prix dans le domaine de l'immobilier résidentiel dans la région de la métropole d'Osaka. Dans cet article, il montre que les lots plus grands sont proportionnellement plus chers. Il considère qu'il y a deux explications possibles. La première est la structure oligopolistique du marché avec une utilité marginale non décroissante par rapport à la grandeur du lot. La seconde est l'irréversibilité dans le changement de la grandeur du lot. En théorie, rien n'empêcherait un agent qui veut obtenir un grand lot de « tricher » en achetant plusieurs fois de petits lots pour constituer le lot ayant la grandeur désirée. En pratique, un obstacle très important intervient, i.e. la possibilité d'être l'objet d'un chantage par un des propriétaires des petits lots. N'importe quel propriétaire des petits lots peut attendre que l'agent achète les terrains de ses voisins pour refuser à la fin de vendre ou de demander un prix exorbitant. Par conséquent, dans ce cas les possibilités pratiques d'arbitrage sont assez restreintes. Nous pouvons voir cet exemple comme une illustration du modèle de Tirole en imaginant un monopoleur qui détient une grosse propriété. Il peut soit la vendre en totalité, soit en la divisant dans des petits lots. Le prix unitaire de la propriété entière est plus grand que le prix unitaire des petits lots. Étant donné que dans le modèle le monopoleur ne peut pas identifier les consommateurs le problème du chantage ne se pose pas et l'arbitrage par achats multiples est faisable.

Un autre exemple d'application de notre modèle est donné par la formation du prix de l'eau. L'un de deux types de méthodes utilisées pour facturer l'eau est *le prix en escalier montant*[9] qui fait payer au consommateur un prix unitaire plus grand à mesure que la consommation augmente, dans le but de décourager le gaspillage d'eau, surtout dans les périodes de pointe durant l'été. Toutes les hypothèses de notre modèle sont satisfaites. Nous retrouvons un monopoleur qui ne connaît pas les préférences de ses clients et ceux-ci les dévoilent justement en faisant leurs choix. Le prix augmente avec la quantité consommée. Rien n'empêche toutefois l'agent de « tricher » et d'acheter plusieurs fois des quantités plus petites, car l'eau est un bien stockable. Donc le problème de la robustesse s'impose dans ce cas-ci. Les problèmes qui pourraient empêcher l'arbitrage sont liés aux coûts de stockage qui pourraient être trop élevés et donc prohibitifs et à la façon dont en

[9] Hartwick, J.M. et Olewiler, N. (1997) *Economics of Natural Resources Use* (Addison Wesley Pub Co), ch.3, 81

pratique le monopoleur peut contrôler la quantité d'eau consommée par chaque consommateur.

Comme dernier exemple, considérez le cas des échantillons envoyés aux clients, par exemple, les logiciels. Dans ce type de marché, les firmes disposent généralement d'un pouvoir de marché car le coût marginal de production pour les logiciels est faible et le nombre de producteurs pour un type de produit donné est restreint. Fréquemment, un producteur va fixer un prix faible (généralement nul) pour des petites quantités (les échantillons) dans le but d'attirer et initier la clientèle et un prix élevé pour les gros consommateurs qui demandent des quantités importantes.

4.1. Le modèle avec achat unique

On considère un monopoleur qui produit un seul bien à un coût marginal constant $c > 0$. Le marché pour ce bien compte un grand nombre de consommateurs qui ont des goûts hétérogènes caractérisés par des préférences quasi-linéaires paramétrées par $\theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$. En consommant q unités du bien contre un transfert monétaire total t, un consommateur de type θ obtient le surplus net $U(\theta, q, t) = \theta V(q) - t$.

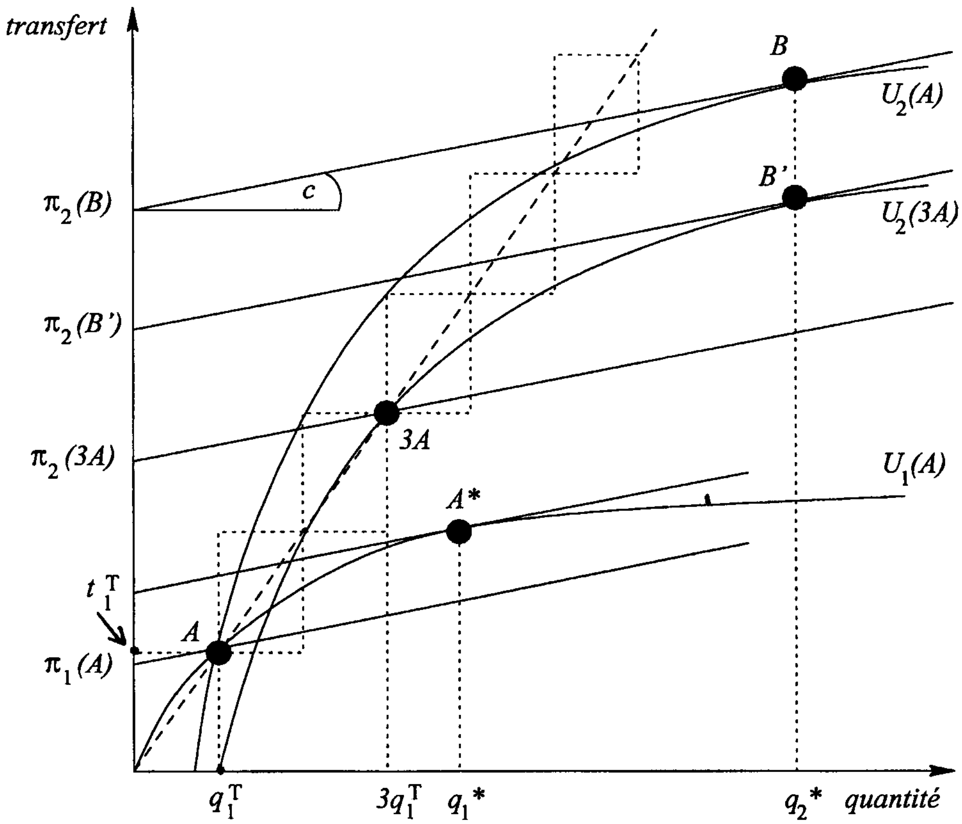
V est une fonction deux fois continûment différentiable et strictement concave, définie sur $[0,\infty)$, avec $V(0) = 0$, $V'(q) > 0$ et $V''(q) < 0$, $\lim_{q\to 0} V'(q) = \infty$ et $\lim_{q\to\infty} V'(q) = 0$. Nous supposerons que la fonction $V(.)$ est la même pour tous les consommateurs.

θ est un paramètre qui nous indique le type des consommateurs et il varie d'un consommateur à l'autre. Il représente l'information privée détenue par chaque consommateur car il n'est pas connu du monopoleur.

Pour chaque consommateur, le paramètre θ peut prendre la valeur $\theta_1 > 0$ avec la probabilité λ et la valeur $\theta_2 > \theta_1$ avec la probabilité $(1 - \lambda)$. Les consommateurs de type θ_1 ont une faible demande et leur proportion dans la population totale est donc λ, alors que les consommateurs de type θ_2 ont une forte demande et leur proportion dans la population totale est $(1 - \lambda)$.

Analyse graphique

Le modèle est bien résumé dans la figure 1 suivante.



Les préférences du producteur dans l'espace (q, t) sont représentées par des droites d'isoprofit de pente égale au coût marginal de production (c) pour un bien donné. Les deux types de consommateurs ont des préférences quasi-linéaires. Le niveau d'utilité du consommateur de type θ_1 est donné par $U_1(A)$. Pour le consommateur de type θ_2 nous avons tracé deux courbes d'indifférence correspondant aux niveaux d'utilité $U_2(A)$ et $U_2(3A)$. Les préférences du producteur s'accroissent dans la direction nord-ouest alors que celles des deux types de consommateurs s'accroissent dans la direction sud-est ; par conséquent, $U_2(3A) > U_2(A)$.

Pour avoir une allocation efficace, il est nécessaire que le taux marginal de substitution de chaque consommateur soit égal au coût marginal c ; donc, le consommateur à faible demande devrait consommer q_1^* alors que le consommateur à forte demande q_2^*. Un producteur discriminant au premier degré implanterait une allocation efficace en offrant au consommateur à faible demande le paquet[10] A^* (le paquet pour le consommateur à forte demande n'est pas représenté dans le graphique). Par contre, si le producteur discrimine au deuxième degré, il trouvera optimal de réduire la quantité offerte au consommateur à faible demande de $q_1^* - q$ dans le but d'inciter le consommateur à forte demande de choisir le paquet B. La distorsion, par rapport à la quantité efficace, de la quantité offerte au consommateur à faible demande dépend de la proportion λ des consommateurs à faible demande dans la population. Lorsqu'il décide de l'ampleur de cette distorsion, le producteur prend en considération les profits respectivement attendus de la part des consommateurs à faible et à forte demande : $\lambda\pi_1$ et $(1 - \lambda)\pi_2$.

L'analyse standard de ce modèle suppose qu'aucun arbitrage n'est possible entre les consommateurs ; autrement dit, aucun consommateur ne peut pas acheter le paquet B et le revendre ensuite sous forme de plus petits paquets à d'autres consommateurs. Toutefois, il n'y a aucune restriction explicite qui obligerait le consommateur d'acheter une seule fois.

Par conséquent, dans le cas présent, rien n'empêche un consommateur d'acheter plusieurs fois le paquet A dans le but d'obtenir la combinaison « prix – quantité » désirée. Si nous supposons que n'importe quel consommateur peut avoir une telle stratégie, alors le consommateur à forte demande renoncera au paquet B en choisissant, par exemple, le paquet $3A$ obtenu par trois achats répétés du paquet A.

Nous qualifierons le menu de paquets offert par le producteur de *robuste* s'il est tel que la stratégie des achats répétés n'est pas intéressante pour le consommateur à forte demande.

Assurer la *robustesse* de la tarification suppose alors l'imposition d'une restriction *sous-additive* sur la fonction de transfert ; c'est-à-dire que pour n'importe quel couple

[10] Par *paquet* nous comprenons un couple « prix – quantité » offert par le producteur au consommateur.

(q', t') destiné à un certain type de consommateur, il ne doit pas exister un ensemble $\{q_i, t_i\}$ de paquets tels que $\Sigma\, q_i \geq q'$ et $\Sigma\, t_i \leq t'$.

Le paquet B' de l'allocation (A, B') a cette propriété et rapporte plus de profit au monopoleur que le paquet $3A$ ($\pi_2(3A) < \pi_2(B')$). Toutefois, il est probable que l'allocation (A, B') ne sera pas optimale dans la classe des allocations implantées avec des paquets robustes. Identifier et caractériser la tarification optimale robuste a constitué l'objet premier de la recherche que nous avons menée.

Analyse algébrique

À l'équilibre le monopoleur offre deux paquets « quantité – prix » : un paquet (q_1, t_1) destiné aux consommateurs de type θ_1 et un paquet (q_2, t_2) destiné aux consommateurs de type θ_2. De plus, les prix unitaires implicites pour les deux paquets sont donnés par $p_1 = \frac{t_1}{q_1}$ et $p_2 = \frac{t_2}{q_2}$. Dans ce modèle, on fait l'hypothèse que le producteur sert les deux types de consommateurs, ce qui arrive lorsque λ est « suffisamment grand » ou lorsque $V'(0) = \infty$.

Si le monopoleur connaissait θ, il choisirait la quantité qui maximise le surplus social $\theta V(q) - cq$ et il extrairait tout le surplus du consommateur en mettant $t(q) = \theta V(q)$. Cela nous conduit à q_1^* et q_2^* qui représentent les niveaux de consommation de premier rang, i.e. $\theta_1 V'(q_1^*) = c$ et $\theta_2 V'(q_2^*) = c$. Dans le graphique, les paquets de premier rang sont $A^* = (q_1^*, t_1^*)$ et $B^* = (q_2^*, t_2^*)$ (qui n'est pas représenté) où $t_1^* = \theta_1 V(q_1^*)$ et $t_2^* = \theta_2 V(q_2^*)$.

On doit noter que la pente de la droite qui passe par l'origine et par un paquet donné est égale au prix unitaire implicite pour ce paquet.

Étant donné que θ est inconnu du monopoleur, celui-ci ne peut pas extraire tout le surplus du consommateur tout en maximisant le surplus social car le consommateur de type θ_2 va préférer strictement le paquet A^* au paquet B^*.

Dans le contexte du modèle avec achat unique, le problème de maximisation du monopoleur est le suivant :

$$\max_{q_1, q_2} \{ \lambda(t_1 - cq_1) + (1 - \lambda)(t_2 - cq_2) \}$$

sous les contraintes :

- $\theta_1 V(q_1) - t_1 \geq \theta_1 V(q_2) - t_2,$ (IC_1)
- $\theta_2 V(q_2) - t_2 \geq \theta_2 V(q_1) - t_1,$ (IC_2)
- $\theta_1 V(q_1) - t_1 \geq 0,$ (IR_1)
- $\theta_2 V(q_2) - t_2 \geq 0.$ (IR_2)

Comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre précédent, il est possible de prouver[11] qu'à l'optimum :

1. (IR_1) est serrante ;
2. (IC_2) est serrante ;
3. $q_2 \geq q_1$;
4. on peut négliger (IC_1) et (IR_2).

Par conséquent, le problème de maximisation devient :

$$\max_{q_1, q_2} \{ \lambda(t_1 - cq_1) + (1 - \lambda)(t_2 - cq_2) \}$$

sous les contraintes :

- $\theta_2 V(q_2) - t_2 = \theta_2 V(q_1) - t_1,$
- $\theta_1 V(q_1) - t_1 = 0.$

Si nous remplaçons t_1 et t_2 avec les expressions respectives nous arrivons à :

$$\max_{q_1,q_2} \{ \lambda(\theta_1 V(q_1) - cq_1) + (1 - \lambda)[\theta_2 V(q_2) - (\theta_2 - \theta_1)V(q_1) - cq_2] \}.$$

Les conditions de premier ordre sont les suivantes :

$$\frac{f\pi}{fq_1} = 0,$$

$$\frac{f\pi}{fq_2} = 0.$$

En calculant les deux dérivées nous obtenons que[12] :

$$\lambda[\theta_1 V' (q_1^T) - c] + (1 - \lambda)[-(\theta_2 - \theta_1) V' (q_1^T)] = 0,$$

[11] Voir annexe A pour démonstration.
[12] Ces variables sont indicées par « T » pour Tirole.

$$(1-\lambda)[\theta_2 V'(q_2^T)-c]=0.$$

La première équation nous conduit à :

$$\lambda\theta_1 V'(q_1^T)-(1-\lambda)(\theta_2-\theta_1)V'(q_1^T)=\lambda c \Rightarrow$$

$$V'(q_1^T)[\lambda\theta_1-(1-\lambda)(\theta_2-\theta_1)]=\lambda c \Rightarrow$$

$$\lambda\theta_1 V'(q_1^T)\,[1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1}]=\lambda c.$$

Donc la solution du modèle est donnée par :

$$\theta_1 V'(q_1^T)[1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1}]=c,$$

$$\theta_2 V'\left(q_2^T\right)=c$$

Donc, dans le modèle de Tirole, les paquets qui maximisent le profit attendu du monopoleur sont les suivants :

$(q_1^T, t_1^T)=(q_1^T, \theta_1 V(q_1^T))$ et

$(q_2^T, t_2^T)=(q_2^*, \theta_2 V(q_2^*)-(\theta_2-\theta_1)V(q_1^T))$.

En conclusion, la solution du modèle standard nous indique que la quantité achetée par les consommateurs à forte demande est optimale (l'utilité marginale de consommer le bien est égale au coût marginal), alors que la quantité achetée par les consommateurs à faible demande est sous-optimale ($\theta_1\ V'(q_1^T)>c$).

Comme nous avons pu le voir dans l'analyse graphique précédente, la solution du modèle avec achat unique n'est pas robuste si les consommateurs peuvent pratiquer des achats multiples.

4.2. Le modèle avec achats multiples

Pour bâtir le modèle de *tarification non linéaire robuste*, nous reprenons le modèle standard de Tirole auquel nous ajoutons des contraintes que nous appelons *les conditions de robustesse*. La structure du modèle est similaire à ceci près que les consommateurs disposent de plus de stratégies de déviation.

Nous supposons que le monopoleur ne peut pas identifier les consommateurs (s'il pouvait, il interdirait tout simplement les achats multiples), i.e. que les transactions sont anonymes. Par conséquent, le monopoleur ne peut imposer aucune restriction quant au nombre de paquets achetés par les consommateurs. Nous supposons aussi que le paquet vendu à un certain consommateur ne dépend pas des paquets vendus aux autres consommateurs. Nous excluons de notre modèle les achats conjoints.

Sans perte de généralité, nous cherchons des paquets (q_1, t_1) et (q_2, t_2) tels que, à l'équilibre, le consommateur de type θ_2 achètera un seul paquet (q_2, t_2) alors que le consommateur de type θ_1 achètera un seul paquet (q_1, t_1). Ceci se conçoit aisément par un argument de nature similaire à celui du *principe de révélation* : s'il existe une tarification où les agents achètent plusieurs paquets, alors il existe une tarification conduisant à une allocation identique où ils n'en achètent qu'un seul.

Le profit attendu du monopoleur est donné par :

$$\lambda(t_1 - cq_1) + (1 - \lambda)(t_2 - cq_2).$$

À l'équilibre, les deux paquets offerts par le monopoleur doivent satisfaire les contraintes de participation et d'incitation. Pour que le consommateur de type θ_1 préfère le paquet (q_1, t_1) à n'importe quel nombre des paquets (q_1, t_1) et (q_2, t_2), les contraintes d'incitation suivantes doivent être satisfaites :

- $\theta_1 V(q_1) - t_1 \geq \theta_1 V(kq_2) - kt_2 \qquad \forall\, k \geq 1, k \in \mathrm{N}, \qquad (1)$
- $\theta_1 V(q_1) - t_1 \geq \theta_1 V(kq_1) - kt_1 \qquad \forall\, k > 1, k \in \mathrm{N}, \qquad (2)$
- $\theta_1 V(q_1) - t_1 \geq \theta_1 V(kq_1 + k' q_2) - kt_1 - k' t_2 \qquad \forall\, k, k' \geq 1, k, k' \in \mathrm{N}. \qquad (3)$

De la même façon, pour que le consommateur de type θ_2 préfère un seul paquet (q_2, t_2) à n'importe quel nombre des paquets (q_1, t_1) et (q_2, t_2), les contraintes d'incitation suivantes doivent être satisfaites :

- $\theta_2 V(q_2) - t_2 \geq \theta_2 V(kq_1) - kt_1$ $\quad\forall\, k \geq 1, k \in \mathrm{N},$ (4)
- $\theta_2 V(q_2) - t_2 \geq \theta_2 V(kq_2) - kt_2$ $\quad\forall\, k > 1, k \in \mathrm{N},$ (5)
- $\theta_2 V(q_2) - t_2 \geq \theta_2 V(kq_1 + k' q_2) - kt_1 - k' t_2$ $\quad\forall\, k, k' \geq 1, k, k' \in \mathrm{N}.$ (6)

Les contraintes de participation restent les mêmes que pour le modèle avec achat unique, i.e. :

- $\theta_1 V(q_1) - t_1 \geq 0,$ (7)
- $\theta_2 V(q_2) - t_2 \geq 0.$ (8)

Ce modèle a été analysé par Ingela Alger (1999) mais en supposant que les consommateurs peuvent acheter n'importe quel nombre *réel* de paquets, i.e. que Alger considère $k \in \mathrm{R}$, $k \geq 1$. Alger observe qu'il est préférable de supposer que les consommateurs disposent de stratégies discrètes mais que cette hypothèse entraîne des difficultés techniques.

Sous l'hypothèse que k est réel, Alger montre que même si le problème de maximisation semble complexe, plusieurs contraintes peuvent être éliminées facilement. Alger prouve que les seules contraintes serrantes à l'équilibre sont la contrainte de participation (7) pour le type θ_1 et la contrainte d'incitation (4) pour le type θ_2. La contrainte d'incitation (4) est serrante pour un certain $k^*(q_1)$, où $k^*(q_1) \geq 1$ représente le nombre préféré de paquets (q_1, t_1^A) du consommateur de type θ_2. $k^*(q_1)$ est ensuite déterminé à partir d'un programme de maximisation de la rente obtenu par les consommateurs de type θ_2. Ainsi, dans le modèle d'Alger, le problème de maximisation devient :

$$\max_{q_1,q_2,t_1,t_2} \lambda(t_1 - cq_1) + (1 - \lambda)(t_2 - cq_2)$$

sous les contraintes :

- $\theta_2 V(q_2) - t_2 = \theta_2 V(k^*(q_1)q_1) - k^*(q_1)t_1$;

- $\theta_1 V(q_1) - t_1 = 0$.

Lorsque les consommateurs peuvent acheter n'importe quel multiple réel de paquets offerts par le monopoleur, le menu de paquets optimal est tel que les consommateurs de type θ_1 n'obtiennent aucune rente, alors que les consommateurs de type θ_2 obtiennent une rente strictement positive.

Les transferts payés par les deux types de consommateurs sont donnés par[13] :

- $t_1^A(q_1, q_2) = \theta_1 V(q_1)$ et
- $t_2^A(q_1, q_2) = \theta_2[V(q_2) - V(k^*(q_1)q_1)] + k^*(q_1)\theta_1 V(q_1)$.

La rente obtenue par le consommateur de type θ_2 est alors :

$$\theta_2 V(k^*(q_1)q_1) - k^*(q_1)\theta_1 V(q_1) > 0.$$

La rente n'est plus déterminée par l'utilité que le consommateur de type θ_2 aurait obtenu en achetant le paquet destiné au consommateur de type θ_1 mais par le nombre $k^*(q_1) \geq 1$ de petits paquets préféré par le consommateur de type θ_2.

Les quantités obtenues par les deux types de consommateur à l'équilibre dans le modèle d'Alger sont telles que :

- la quantité offerte au consommateur de type θ_2 est la quantité de premier rang : $q_2^A = q_2^*$;
- la quantité offerte au consommateur de type θ_1 est toujours distortionnée vers le bas comparativement à la solution de premier rang. q_1^A est donné par l'expression suivante :

$$\theta_1 V'(q_1^A) = c + \frac{1-\lambda}{\lambda} k^*(q_1^A)[\theta_2 V'(k^*(q_1^A)q_1^A) - \theta_1 V'(q_1^A)].$$

Alger montre ensuite que si le consommateur de type θ_2 peut acheter n'importe quel nombre réel $k \in [1, \infty)$ de paquets (q_1, t_1), alors le menu de paquets qui maximise le profit du monopoleur, (q_1^A, t_1^A) et (q_2^A, t_2^A), est tel que le prix unitaire implicite est strictement décroissant : $p_1^A > p_2^A$. Le monopoleur offre un escompte au consommateur à demande élevée et il n'y a pas de prime de quantité. C'est un résultat surprenant dans le sens que nous nous attendons à ce que le prix ne soit pas toujours décroissant dans le cas discret.

4.3. Quand la robustesse intervient-elle ?

Nous voulons savoir si le problème de robustesse se pose pour tout λ ou seulement pour certaines valeurs de λ.

Pour trouver les conditions sur λ, nous revenons à la figure présentée à la page 23 où nous notons par A le point de coordonnées (q_1^T, t_1^T) où $t_1^T = t(q_1^T)$.

L'équation de la droite qui passe par A et par l'origine est :

$$t(q) = aq + b,$$

$$t(0) = 0 \Rightarrow b = 0,$$

$$t_1^T = a\, q_1^T \Rightarrow a = \frac{t_1^T}{q_1^T}.$$

Donc, l'équation de la droite *en tirets* est la suivante :

$$t(q) = \frac{t_1^T}{q_1^T} q.$$

La courbe qui passe par A et A^* quant à elle est décrite par :

$$U_1(A) = \theta_1 V(q) - t(q) \Rightarrow t(q) = \theta_1 V(q) - U_1(A).$$

La pente de cette droite en A est égale à $\theta_1 V'(q_1^T)$.

La courbe qui passe par A et B est donnée par :

$$U_2(A) = \theta_2 V(q) - t(q) \Rightarrow t(q) = \theta_2 V(q) - U_2(A),$$

avec la pente en A égale à $\theta_2 V'(q_1^T)$.

Par construction, on doit avoir :

$$\theta_1 V(q_1^T) - U_1(A) = \theta_2 V(q_1^T) - U_2(A) = t_1^T.$$

[13] Ces variables sont indicées par « *A* » pour Alger.

Si la pente de la droite *en tirets* est plus grande que la pente de la courbe qui passe par A et B, alors le problème de robustesse ne se pose pas car les consommateurs de type θ_2 n'ont pas alors intérêt à tricher, c'est-à-dire à acheter plusieurs fois le paquet destiné aux consommateurs de type θ_1 (ils obtiendraient un niveau d'utilité inférieur à ce qu'ils peuvent avoir en choisissant le paquet qui a été conçu pour eux).

Par conséquent, on peut avoir un problème de robustesse si :

$$\frac{t_1^T}{q_1^T} < \theta_2 V'\ (q_1^T),$$

mais on sait que :

$$\theta_1\ V'(q_1^T) = \frac{c}{1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1}}\ ;$$

donc,

$$V'\ (q_1^T) = \frac{1}{\theta_1}\frac{c}{1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1}}.$$

La condition pour que le problème de robustesse se pose devient :

$$\frac{t_1^T}{q_1^T} < \frac{\theta_2}{\theta_1}\frac{c}{1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1}}.$$

On remarque que si $1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1} < 0$ cette condition n'est jamais réalisée.

Regardons cette inégalité plus en détail.

$$1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda < \frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_2}.$$

Par conséquent, si $\lambda < \frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_2}$, la contrainte de robustesse n'est pas serrante.

On peut avoir un problème de robustesse si $\lambda > \frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2}$ et si

$$\frac{t_1^T}{q_1^T} < \frac{\theta_2}{\theta_1} \frac{c}{1 - \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1}} \Leftrightarrow$$

$$\lambda < \frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2} \frac{t_1^T}{t_1^T - cq_1^T}.$$

En conclusion, il est possible d'avoir un problème de robustesse dans le modèle si :

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2} < \lambda < \frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2} \frac{t_1^T}{t_1^T - cq_1^T}.$$

4.4. Le cas discret du modèle avec achats multiples

Revenons à notre modèle présenté dans la section 4.2. Notre premier objectif est de réduire le nombre des contraintes dans le but de résoudre le problème de maximisation du monopoleur. Nous dérivons ainsi la suite de propositions suivantes.

Proposition 1. *Le principal sert toujours le consommateur de type* θ_2, *i.e. que* $q_2 > 0$.

Preuve. Supposons que le principal ne sert personne, alors il fait un profit nul. S'il vend à un prix fixe légèrement supérieur à son coût marginal, il fait un profit non nul et les deux consommateurs achètent. Si le consommateur de type θ_1 trouve profitable d'acheter, alors le consommateur de type θ_2 également ($q_2 > 0$) car :

$$U_2(q_2, t_2) = \theta_2 V(q_2) - t_2 \geq \theta_2 V(q_1) - t_1 > \theta_1 V(q_1) - t_1 = U_1(q_1, t_1).$$

Nous avons tenu compte des contraintes d'incitation pour le consommateur de type θ_2, pour k = 1, et du fait que $\theta_2 > \theta_1$.

Si le monopoleur ne vend qu'au consommateur de type θ_2, alors il vend nécessairement le couple efficace (q_2^*, t_2^*) tel que :

$$(q_2^*, t_2^*) \in \text{argmax } t_2 - cq_2$$
$$\text{s.c. } \theta_2 V(q_2) - t_2 = 0,$$

soit $q_2^* > 0$ tel que $\theta_2 V'(q_2^*) = c$.

Proposition 2. *Pour tout contrat tel que* $t_1 > 0$ *et* $t_2 > 0$, *les consommateurs achètent un nombre fini de paquets.*

Preuve. Soit $f(k) = \theta_2 V(kq_1) - kt_1 \ \forall\ k \in \mathrm{N}, k \geq 1$ et $\forall\ q_1$. On veut montrer que pour k fini suffisamment grand, f atteint un maximum.

$$f(k+1) - f(k) = [\theta_2 V((k+1)q_1) - (k+1)t_1] - [\theta_2 V(kq_1) - kt_1]$$
$$= \theta_2\{V((k+1)q_1) - V(kq_1)\} - t_1.$$

Le théorème de Taylor[14] nous permet d'écrire :

$$V((k+1)q_1) = V(kq_1) + V'(\tilde{z})((k+1)q_1 - kq_1)$$
$$\text{avec } kq_1 \leq \tilde{z} \leq (k+1)q_1.$$
$$\Rightarrow V((k+1)q_1) - V(kq_1) = V'(\tilde{z})q_1.$$

Lorsque $k \to \infty$, $\tilde{z} \to \infty$, ce qui implique, par construction de $V(.)$, que $V'(\tilde{z}) = 0$.

Donc, $\lim\limits_{k\to\infty} [V((k+1)q_1) - V(kq_1)] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} [f(k+1) - f(k)] = -t_1 < 0$. Donc il existe un $\bar{k} < \infty$ tel que $\forall\ k \geq \bar{k}$, $f(k+1) < f(k)$. Donc, f atteint son maximum sur $\{1,..., \bar{k}\}$.

Soit $g(k, k') = \theta_2 V(kq_1 + k'q_2) - kt_1 - k't_2 \ \forall\ k, k' \in \mathrm{N}$, $k, k' \geq 1$ et $\forall\ q_1, q_2$. Tout comme dans le cas précédent, nous voulons montrer que pour k et k' suffisamment grands, g atteint son maximum sur N^2. Facilement, nous pouvons observer que :

$$\theta_2 V(kq_1 + k'q_2) - kt_1 - k't_2 \leq \theta_2 V(2\max(kq_1, k'q_2)) - 2\min(kt_1, k't_2).$$

[14] Voir Alpha C. Chiang, *Fundamental Methodes of Mathematical Economics*, Third Edition, 1984, pg. 254-263.

Considérons maintenant toute suite ordonnée de couples (k_n, k'_n), $n = 1,\ldots,\infty$, tel que $k_n \geq k_{n-1}$, $k'_n \geq k'_{n-1}$ et $k_n k'_n > k_{n-1}k'_{n-1}$.

Soit $h(n) = \theta_2 V(2\max(k_n q_1, k'_n q_2)) - 2\min(k_n t_1, k'_n t_2)$. Nous voulons montrer que h a un maximum lorsque n tend vers l'infini.

De façon similaire à la preuve précédente, nous écrivons :

$$h(n+1) - h(n) = \theta_2\{V(2\max(k_{n+1}q_1, k'_{n+1}q_2)) - V(2\max(k_n q_1, k'_n q_2))\}$$
$$- 2\{\min(k_{n+1}t_1, k'_{n+1}t_2) - \min(k_n t_1, k'_n t_2)\}.$$

Le même théorème de Taylor nous permet d'écrire :

$$V(2\max(k_{n+1}q_1, k'_{n+1}q_2)) = V(2\max(k_n q_1, k'_n q_2))$$
$$+ 2V'(\tilde{z})\{\max(k_{n+1}q_1, k'_{n+1}q_2) - \max(k_n q_1, k'_n q_2)\}$$
$$\text{avec } \max(k_n q_1, k'_n q_2) \leq \tilde{z} \leq \max(k_{n+1}q_1, k'_{n+1}q_2).$$

Lorsque $n \to \infty$, $\tilde{z} \to \infty$, ce qui implique, par construction de $V(.)$, que $V'(\tilde{z}) = 0$.

Donc, $\lim_{n\to\infty} [V(2\max(k_{n+1}q_1, k'_{n+1}q_2)) - V(2\max(k_n q_1, k'_n q_2))] = 0 \Rightarrow$
$\lim_{n\to\infty} [h(n+1) - h(n)] < 0$, ce qui implique que, lorsque n est suffisamment grand, h atteint son maximum et, par conséquent, g atteint son maximum lorsque k et k' tendent vers l'infini.

Une analyse similaire peut être faite pour un consommateur de type θ_1 ce qui conclut notre preuve.

Proposition 3. *La contrainte de participation pour le consommateur de type* θ_2 *est strictement non serrante et* $(q_2 - q_1)(t_2 - t_1) \geq 0$ *est satisfaite avec égalité si et seulement si* $q_1 = q_2$ et $t_1 = t_2$.

Preuve. Nous avons vu dans la preuve de la proposition 1 que :
$\theta_2 V(q_2) - t_2 \geq \theta_2 V(q_1) - t_1 > \theta_1 V(q_1) - t_1 \geq 0$ (étant donné la contrainte de participation du type θ_1). Par conséquent, $\theta_2 V(q_2) - t_2 > 0$.

Supposons que $q_1 = q_2$. La contrainte d'incitation (4) pour $k = 1 \Rightarrow t_2 \leq t_1$, alors que la contrainte d'incitation (1) pour $k = 1 \Rightarrow t_1 \leq t_2$. Donc $t_1 = t_2$. Ibidem pour $t_1 = t_2$.

Proposition 4. $q_2 \geq q_1$ (donc $t_2 \geq t_1$).

Preuve. Si nous considérons les contraintes d'incitation (1) et (4) pour $k = 1$ et nous les additionnons, nous obtenons :

$$(\theta_2 - \theta_1)(V(q_2) - V(q_1)) \geq 0 \Rightarrow q_2 \geq q_1.$$

Regardons maintenant la contrainte d'incitation (1) pour $k = 1$.

$$\theta_1 V(q_1) - t_1 \geq \theta_1 V(q_2) - t_2 \Rightarrow$$
$$t_2 - t_1 \geq \theta_1[V(q_2) - V(q_1)] \geq 0.$$

Proposition 5. *Le fait que la contrainte de participation du type θ_2 est strictement non serrante implique que sa contrainte d'incitation est serrante et de la forme* :

$$\theta_2 V(q_2) - t_2 = \theta_2 V(kq_1) - kt_1 \textit{ pour au moins un certain } k \geq 1.$$

Preuve. Supposons que non et que le contrat est optimal (il maximise les profits du monopoleur). Puisque $\theta_2 V(q_2) - t_2 > 0$, on peut hausser t_2 à la marge en respectant la contrainte de participation et les contraintes d'incitation du consommateur de type θ_2 et en relâchant les contraintes du consommateur de type θ_1. Puisque le profit augmente, le contrat n'est pas optimal. Donc la contrainte d'incitation (6) est serrante, ce qui implique qu'il existe un couple (k, k'), $k \geq 1$, $k' \geq 1$, tel que :

$$\theta_2 V(q_2) - t_2 = \theta_2 V(kq_1 + k' q_2) - kt_1 - k' t_2.$$

Puisque $t_2 \geq t_1$, on a bien évidemment $t_2 > 0$ (sinon le monopoleur fait sûrement une perte avec $q_2 > 0$). Donc, $k' = 0$ sinon on pourrait hausser t_2 de dt (la contrainte de participation n'est pas serrante) et accroître le profit du monopoleur sans affecter la contrainte d'incitation (le côté gauche baisse de dt alors que le côté droit baisse de $k' dt$).

Proposition 6. *La contrainte de participation pour le consommateur de type θ_1 est serrante (on peut négliger ses contraintes d'incitation).*

Preuve. Supposons que non, alors la contrainte d'incitation (3) est serrante sinon on pourrait hausser t_1 de dt sans affecter aucune contrainte et accroître le profit du monopoleur. De la même manière que dans la proposition 5, cette contrainte doit être de la forme :

$$\theta_1 V(q_1) - t_1 = \theta_1 V(k' q_2) - k' t_2 \text{ pour au moins un certain } k' \geq 1.$$

Considérons maintenant de hausser t_1 de dt et t_2 de dt/k'. Très clairement, le profit du monopoleur augmente. Par ailleurs, la contrainte d'incitation du type θ_1 n'est pas affectée. Les deux contraintes de participation sont censées être libres et ne sont pas affectées si dt est suffisamment petit.

Par ailleurs, la contrainte d'incitation du type θ_2 est de la forme :

$$\theta_2 V(q_2) - t_2 = \theta_2 V(kq_1) - kt_1 \text{ pour au moins un certain } k \geq 1,$$

donc le côté gauche baisse de dt/k' et le côté droit de kdt. Très clairement, $1/k' \leq k$ de sorte que la contrainte n'est pas resserrée. On a donc accru le profit du monopoleur à partir d'un contrat censé optimal, d'où une contradiction. On en conclut que la contrainte de participation pour le type θ_1 est serrante.

Étant donné ces six propositions, nous sommes en mesure de réécrire le problème de maximisation du monopoleur comme il suit :

$$\max_{q_1,q_2,t_1,t_2} \lambda(t_1 - cq_1) + (1 - \lambda)(t_2 - cq_2)$$

sous les contraintes suivantes :

- $\theta_2 V(q_2) - t_2 \geq \theta_2 V(kq_1) - kt_1 \quad \forall\, k \geq 1, k \in \mathrm{N}$ et $\theta_2 V(q_2) - t_2 = \theta_2 V(kq_1) - kt_1$ pour un certain k, $k \geq 1$, $k \in \mathrm{N}$,
- $\theta_1 V(q_1) - t_1 = 0$.

Proposition 7. *La quantité offerte aux consommateurs de type θ_2 est la quantité efficace :* $q_2^m = q_2^*$.[15]

[15] L'indice *m* est employé pour dénoter la solution avec achats multiples.

Preuve. Remplaçons dans la fonction objectif t_1 et t_2 par leurs expressions respectives :

$$t_1 = \theta_1 V(q_1),$$

$$t_2 = \theta_2[V(q_2) - V(kq_1)] + k\theta_1 V(q_1), \text{ pour un certain } k \text{ donné, } k \geq 1, k \in \mathrm{N}.$$

Le profit que le monopoleur veut maximiser a la forme suivante :

$$\pi = \lambda(\theta_1 V(q_1) - cq_1) + (1 - \lambda)(\theta_2[V(q_2) - V(kq_1)] + k\theta_1 V(q_1) - cq_2).$$

Donc, si nous maximisons π par rapport à q_2, nous posons :

$$\frac{f\pi}{fq_2} = 0 \Rightarrow$$

$$(1 - \lambda)(\theta_2 V'(q_2) - c) = 0 \Rightarrow$$

$$\theta_2 V'(q_2) = c \Rightarrow$$

$$q_2^m = q_2^*.$$

Par conséquent, nous pouvons réécrire le problème de maximisation avec seulement trois variable de contrôle :

$$\max_{q_1,t_1,t_2} \lambda(t_1 - cq_1) + (1 - \lambda)(t_2 - cq_2^*)$$

sous les contraintes suivantes :

- $\theta_2 V(q_2^*) - t_2 \geq \theta_2 V(kq_1) - kt_1 \quad \forall\, k \geq 1, k \in \mathrm{N}$ et $\theta_2 V(q_2^*) - t_2 = \theta_2 V(kq_1) - kt_1$ pour au moins un certain k, $k \geq 1$, $k \in \mathrm{N}$,
- $\theta_1 V(q_1) - t_1 = 0.$

La première étape est de prouver que l'ensemble sur lequel nous voulons maximiser est non vide. Cela est relativement trivial car tous les contrats de type :

$$\{(q_1, t_1), (q_2 = nq_1, t_2 = nt_1)\}, n \geq 1, n \in \mathrm{N} \text{ sont robustes.}$$

Étant donné que l'ensemble sur lequel nous maximisons est compact et non vide nous pouvons affirmer qu'il existe toujours un maximum sur cet ensemble[16]. Notez maintenant

[16] Nous avons montré à la proposition 2 que les consommateurs achetaient un nombre fini de paquets. Il s'en suit que le profit du monopoleur est nécessairement borné. Le reste suit d'une application directe du théorème de Weierstrass.

qu'à l'optimum, la contrainte d'incitation pour le type θ_2 est serrante soit pour un seul k, soit pour un maximum de deux valeurs de k différentes.[17]

Cas 1 : Si la contrainte d'incitation est serrante pour un seul k (inconnu), en considérant ce k comme donné, nous pouvons calculer les valeurs optimales de q_1, t_1 et t_2 en fonction de k. Pour cela, considérons encore une fois le profit que le monopoleur veut maximiser et qui prend alors la forme suivante :

$$\pi = \lambda(\theta_1 V(q_1) - cq_1) + (1 - \lambda)(\theta_2[V(q_2^*) - V(kq_1)] + k\theta_1 V(q_1) - cq_2^*).$$

Nous cherchons q_1 qui maximise π. Donc nous posons :

$$\frac{f\pi}{fq_1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda(\theta_1 V'(q_1^m) - c) + (1 - \lambda)[-k\theta_2 V'\left(kq_1^m\right) + k\theta_1 V'(q_1^m)] = 0.$$

Cette dernière équation nous permet d'obtenir $q_1^m(k)$ et par la suite nous pouvons calculer facilement $t_1^m(k)$ et $t_2^m(k)$ en remplaçant $q_1^m(k)$ dans leurs expressions respectives :

$$t_1^m(k) = \theta_1 V(q_1^m(k)),$$

$$t_2^m(k) = \theta_2[V(q_2^*) - V(kq_1^m(k))] + k\theta_1 V(q_1^m).$$

Lorsque nous trouvons un k qui est tel que la contrainte d'incitation du type θ_2 est serrante nous pouvons calculer q_1^m, t_1^m, t_2^m et nous devons vérifier ensuite si, pour les valeurs ainsi obtenues, la contrainte de participation du type θ_2 et les deux contraintes d'incitation (non serrantes) pour les deux types, i.e. :

$$\theta_1 V(q_1) - t_1 \geq \theta_1 V(iq_2) - it_2 \qquad \forall\, i \geq 1, i \in \mathrm{N},$$

$$\theta_2 V(q_2) - t_2 \geq \theta_2 V(jq_1) - jt_1 \qquad \forall\, j \geq 1, j \in \mathrm{N},$$

sont respectées.

Comme dernière étape, il reste à vérifier si le profit obtenu avec ces valeurs est supérieur au profit que le monopoleur réaliserait s'il servait seulement le type θ_2 (solution de type « pooling ») ; i.e. :

[17] Cela est dû à la stricte concavité de la fonction d'utilité.

$$\pi_{\text{pooling}} = (1 - \lambda)(\theta_2 V(q_2^*) - c q_2^*).$$

Cas 2 : Si la contrainte d'incitation du type θ_2 est serrante à l'optimum pour deux valeurs k et k' différentes, celles-ci sont nécessairement de la forme suivante : k et $k + 1$. En effet, supposons sans perte de généralité que $k' > k$ et que $k' \neq k + 1$, alors il existe k'' tel que $k' > k'' > k$ et k'' est une déviation optimale pour les consommateurs de type θ_2 de sorte que le contrat n'est ni IC, ni optimal. Par conséquent, q_1^m sera complètement déterminé par les deux contraintes d'incitation serrante, i.e. :

$$\theta_2 V(q_2^*) - t_2 = \theta_2 V(kq_1) - kt_1,$$

$$\theta_2 V(q_2^*) - t_2 = \theta_2 V((k+1)q_1) - (k+1)t_1.$$

$$\Rightarrow \quad \theta_2 V(kq_1) - kt_1 = \theta_2 V((k+1)q_1) - (k+1)t_1.$$

$$\Rightarrow \quad \theta_2[V((k+1)q_1) - V(kq_1)] - t_1 = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \theta_2[V((k+1)q_1) - V(kq_1)] - \theta_1 V(q_1) = 0.$$

Cette dernière équation nous permet de calculer q_1^m en fonction de k et ensuite, de la même façon que précédemment, t_1^m et t_2^m. De façon similaire, nous devons nous assurer ensuite que toutes les contraintes d'incitation sont satisfaites.

Pour mieux illustrer notre modèle, nous avons considéré deux exemples numériques pour lesquels nous avons calculé le contrat optimal.

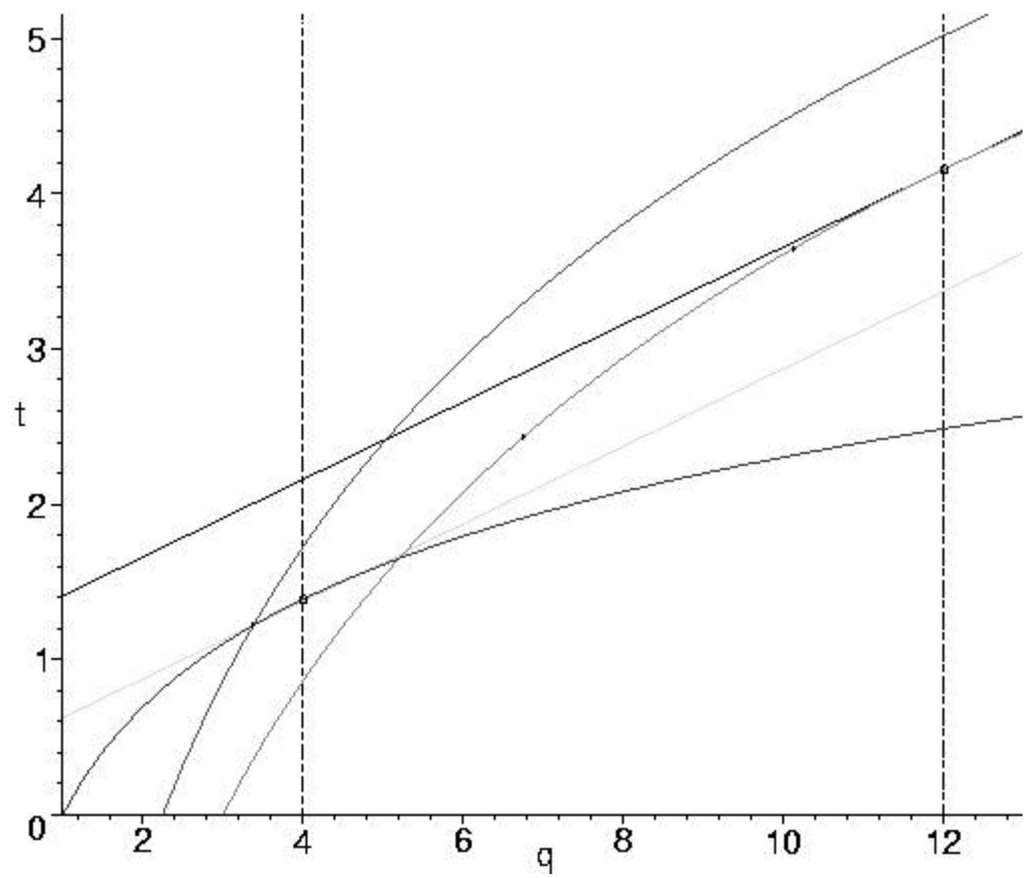
Dans le premier exemple, nous avons travaillé avec la fonction d'utilité $V(q) = \ln(q)$ et les paramètres suivants : $c = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{3}{4}$, $\theta_1 = 1$ et $\theta_2 = 3$.

Dans cet exemple, il n'existe aucune solution où la contrainte d'incitation du type θ_2 est serrante pour un seul k. Nous en concluons qu'il y a deux valeurs k et $k + 1$ pour lesquelles la contrainte d'incitation du type θ_2 est serrante à l'optimum.

En utilisant la méthode de calcul exposée plus haut, nous obtenons que la contrainte d'incitation du type θ_2 est serrante pour $k = 2$ et $k + 1 = 3$. Nous avons vérifié que toutes les contraintes d'incitation sont respectées avec le contrat induit par ces valeurs. Finalement pour établir lequel des deux contrats est optimal nous avons comparé les profits dans les deux cas et nous avons choisi celui qui rapporte le plus grand profit. De cette façon le contrat optimal est obtenu pour $k = 2$. Les paquets offerts aux deux types de consommateurs sont les suivants :

$$q_1^m = \frac{27}{8} = 3.375, t_1^m = \ln\frac{27}{8} = 1.2163, q_2^m = 12, t_2^m = 3\ln(12) - 3\ln\left(\frac{27}{4}\right) + 2\ln\left(\frac{27}{8}\right) = 4.1588 .$$

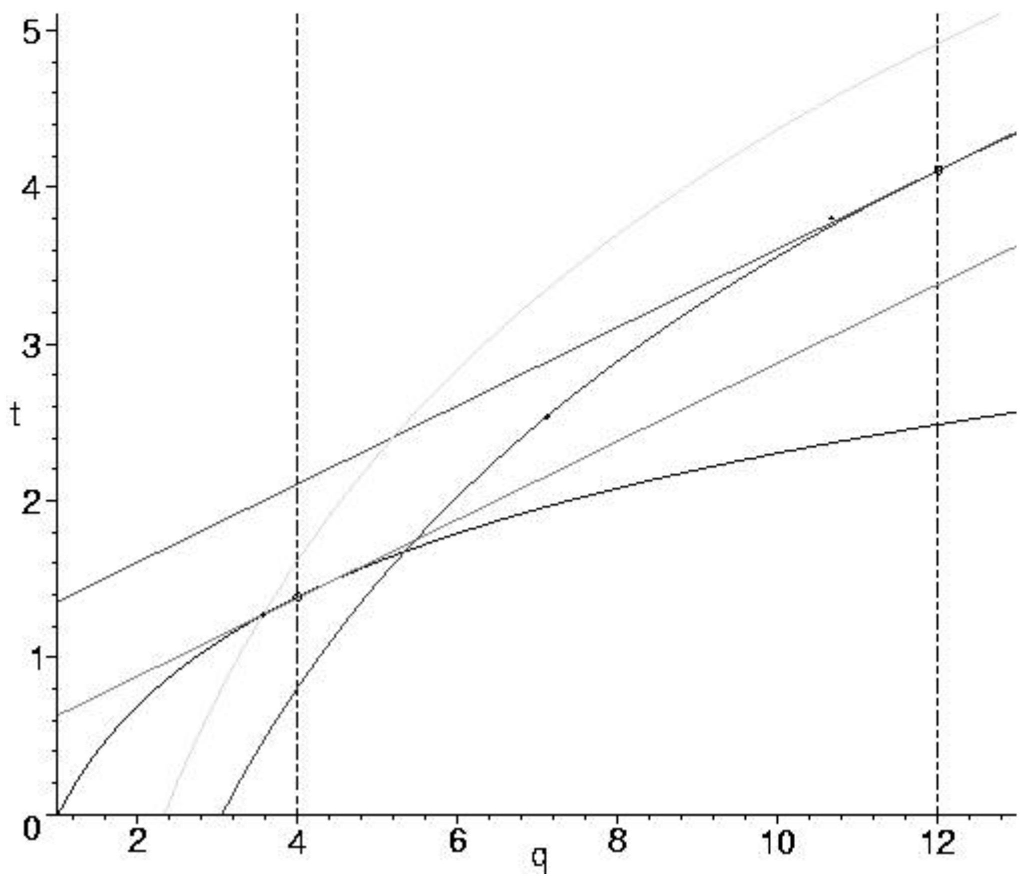
Ce contrat est illustré dans la figure qui suit. Les deux droites verticales en tirets indiquent les quantités efficaces (de premier rang). Il est apparent que le type θ_1 est distortionné vers le bas alors que le type θ_2 reçoit la quantité efficace sur la même courbe d'indifférence que les deux déviations pour lesquelles la contrainte d'incitation est serrante.



Dans cet exemple, le profit obtenu avec le contrat séparateur est inférieur au profit que le monopoleur réaliserait en servant seulement le type θ_2.

Dans le second exemple, les paramètres sont : $c = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{9}{10}$, $\theta_1 = 1$ et $\theta_2 = 3$.

Cette fois-ci, nous nous retrouvons dans le premier cas, i.e. il y a un seul k pour lequel la contrainte d'incitation du type θ_2 est serrante. Il s'agit de $k = 2$. Nous avons décrit plus haut comment calculer le contrat optimal dans ce type de situation. Le profit obtenu ici avec le contrat séparateur (0,452336) est supérieur au profit de pooling (0,445471) où seul le type θ_2 est servi.



Tout comme pour l'autre exemple nous insérons une illustration graphique.

Une fois encore l'allocation du type θ_1 est distortionnée vers le bas alors que le type θ_2 reçoit la quantité efficace sur la même courbe d'indifférence que la déviation pour laquelle sa contrainte d'incitation est serrante. La prochaine déviation (k = 3) conduit à un point au-dessus de cette courbe d'indifférence et, par conséquent, elle ne présente pas d'intérêt pour les consommateurs de type θ_2 car leur utilité diminue. Dans ce cas le contrat optimal offert par le monopoleur est :

$$q_1^m = \frac{32}{9} = 3.5555, t_1^m = \ln\frac{32}{9} = 1.2685, q_2^m = 12, t_2^m = 3\ln(12) - 3\ln\left(\frac{64}{9}\right) + 2\ln\left(\frac{32}{9}\right) = 4.1068$$

Chapitre 5

Conclusion

Les modèles traditionnels de tarification non linéaire sont construits à partir d'une série d'hypothèses plus ou moins explicites qui restreignent les stratégies d'achat des consommateurs.

Dans ce mémoire, nous avons élargi l'espace de ces stratégies en considérant que les consommateurs peuvent anonymement pratiquer des achats multiples.

Dans la première partie du travail, nous avons présenté de façon générale la discrimination en termes de prix en insistant particulièrement sur la discrimination de deuxième degré. Dans la deuxième partie , nous avons effectué un bref survol des modèles d'autosélection auxquels s'apparente le modèle que nous avons développé.

Nous avons défini la *robustesse* comme étant la propriété d'une allocation qui respecte les contraintes standards d'incitation et qui est telle qu'aucun consommateur ne désire faire des achats répétés. Étant donné que la robustesse impose des contraintes plus fortes dans le problème de maximisation du profit du monopoleur, nous nous attendons, si ces contraintes s'avèrent serrantes, à une tarification passablement différente de ce que l'analyse traditionnelle prédit.

Dans ce travail, nous n'avons pas comparé numériquement les résultats du modèle avec achats multiples avec ceux du modèle standard. Cette comparaison au niveau de l'importance de la distorsion de la quantité offerte au type θ_1 et au niveau du profit obtenu par le monopoleur peut potentiellement faire l'objet de recherches futures. Notamment, le lien entre le type de déviation k optimale que doit supporter une allocation optimale et le paramètre λ de la distribution des types demeure à éclaircir.

Annexe A

Preuves des propositions de la page 26:

1. (IC$_2$) $\Rightarrow \theta_2 V(q_2) - t_2 \geq \theta_2 V(q_1) - t_1 \geq \theta_1 V(q_1) - t_1$ car $V(q_1) \geq 0$ et $\theta_2 > \theta_1$.

   Si $\theta_1 V(q_1) - t_1 > 0 \Rightarrow \theta_2 V(q_2) - t_2 > 0$. Cela veut dire qu'il est possible d'augmenter t_1 et t_2 d'une même quantité pour accroître le profit du monopoleur sans modifier pour autant les propriétés incitatives du mécanisme. Par conséquent, $\theta_1 V(q_1) - t_1 = 0$, ce qui implique $\theta_1 V(q_1) = t_1$.

   Le transfert t_1 est choisi de manière telle que le surplus net des consommateurs à faible demande est nul.

2. Supposons que (IC$_2$) est une inégalité stricte. Donc,

   $$\theta_2 V(q_2) - t_2 > \theta_2 V(q_1) - t_1 \geq \theta_1 V(q_1) - t_1 = 0 \Rightarrow \theta_2 V(q_2) - t_2 > 0.$$

   Par conséquent, il est possible d'augmenter t_2 sans remettre en cause ni les propriétés incitatives du mécanisme, ni la contrainte de rationalité individuelle (IR$_2$). Ce faisant, on accroît naturellement le profit du monopoleur ce qui contredit l'optimalité du mécanisme de départ. Ceci nous permet de conclure que (IC$_2$) doit être serrante, c'est-à-dire :

   $\theta_2 V(q_2) - t_2 = \theta_2 V(q_1) - t_1 \Rightarrow t_2 = \theta_2 V(q_2) - \theta_2 V(q_1) + t_1$

   $\Rightarrow t_2 = \theta_2 V(q_2) - \theta_2 V(q_1) + \theta_1 V(q_1)$

   $\Rightarrow t_2 = \theta_2 V(q_2) - (\theta_2 - \theta_1) V(q_1)$.

   Le transfert t_2 est choisi de façon à permettre un surplus net positif pour les consommateurs à demande élevée car ils peuvent toujours choisir d'acheter le paquet (q_1, t_1) et obtenir le surplus net : $\theta_2 V(q_1) - t_1 = \theta_2 V(q_1) - \theta_1 V(q_1) = (\theta_2 - \theta_1) V(q_1)$.

3. (IC$_1$) + (IC$_2$) $\Rightarrow \theta_1 V(q_1) - t_1 + \theta_2 V(q_2) - t_2 \geq \theta_1 V(q_2) - t_2 + \theta_2 V(q_1) - t_1$

   $\Rightarrow (\theta_2 - \theta_1) V(q_2) \geq (\theta_2 - \theta_1) V(q_1) \Rightarrow V(q_2) \geq V(q_1) \Rightarrow q_2 \geq q_1$ (par construction).

4. (IC$_2$) à l'égalité implique : $\theta_2 V(q_2) - t_2 = \theta_2 V(q_1) - t_1 \Rightarrow t_2 - t_1 = \theta_2 [V(q_2) - V(q_1)]$

Mais : $\theta_2[V(q_2) - V(q_1)] \geq \theta_1[V(q_2) - V(q_1)] \Rightarrow t_2 - t_1 \geq \theta_1[V(q_2) - V(q_1)] \Rightarrow$ $\theta_1 V(q_1) - t_1 \geq \theta_1 V(q_2) - t_2$ c'est-à-dire (IC_1). Nous pouvons donc négliger (IC_1) car elle ne contient pas d'information supplémentaire. D'autre part,

$$(IC_2) \Rightarrow \theta_2 V(q_2) - t_2 \geq \theta_2 V(q_1) - t_1 \geq \theta_1 V(q_1) - t_1 = 0$$

$\Rightarrow \theta_2 V(q_2) - t_2 \geq 0$: (IR_2) $\Rightarrow$ nous pouvons donc négliger aussi (IR_2).

Dans ce modèle, il est facile à vérifier que les consommateurs de type θ_1 n'ont jamais intérêt à tricher, c'est-à-dire à choisir le paquet destiné aux consommateurs de type θ_2.

Pour prouver cela, nous devons regarder si IC_1 est toujours vérifiée.

$$IC_1 : \theta_1 V(q_1) - t_1 \geq \theta_1 V(q_2) - t_2 \Leftrightarrow$$

$$0 \geq \theta_1 V(q_2) - t_2 \text{ (car } IR_1 \text{ à l'égalité)} \Leftrightarrow$$

$$0 \geq \theta_1 V(q_2) - [\, \theta_2 V(q_2) - \theta_2 V(q_1) + \theta_1 V(q_1)\,] \Leftrightarrow$$

$$0 \geq \theta_1 V(q_2) - \theta_2 V(q_2) + (\theta_2 - \theta_1) V(q_1) \Leftrightarrow$$

$$0 \geq -(\theta_2 - \theta_1) V(q_2) + (\theta_2 - \theta_1) V(q_1) \Leftrightarrow$$

$$0 \geq (\theta_2 - \theta_1)[V(q_1) - V(q_2)].$$

Mais nous savons que $\theta_2 \geq \theta_1$ et que $q_2 \geq q_1 \Rightarrow V(q_2) \geq V(q_1)$, ce qui veut dire que l'inégalité est toujours satisfaite et, par conséquent, que les consommateurs à faible demande n'ont jamais intérêt à tricher.

Références

[1] ALGER, I. (1999), « Consumer Strategies Limiting the Monopolist's Power : Multiple and Joint Purchases », *RAND Journal of Economics*, 30 (4) : 736-757.

[2] MUSSA, M. et S. ROSEN, « Monopoly and Product Quality », *Journal of Economic Theory*, 18 : 301-317.

[3] MASKIN E. et J. RILEY (1984), « Monopoly with Incomplete Information », *Rand Journal of Economics*, 15 (2).

[4] SALANIÉ B. (1994), *Théorie des contrats*, Economica, Paris.

[5] SHARKEY W. W. (1982), *The theory of natural monopoly*, Cambridge University Press.

[6] SPENCE M. (1977), « Nonlinear prices and welfare », *Journal of Public Economics*, 8 (1) :1-18.

[7] SPULBER D. F. (1981), « Spatial Nonlinear Pricing », The American Economic Review.

[8] TABUCHI T. (1996), « Quantity Premia in Real Property Markets », *Land Economics*, 72 (2) : 206-17.

[9] TIROLE J. (1988), *The Theory of Industrial Organization*, MIT Press.

[10] VARIAN H. R. (1987), « Price Discrimination », *Handbook of Industrial Organization,* ed. R. Schmalensee et R. Willing, Amsterdam.

[11] WILSON R. B. (1993), *Nonlinear Pricing*, Oxford University Press, New York.