

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
AFFILIÉE À L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Un algorithme de minimax dynamique stochastique pour la
solution d'un problème d'optimisation de portefeuille

par

Éric Springuel

Sciences de la gestion

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maître ès sciences
(M.Sc.)

Février 2000
© Éric Springuel, 2000

Sommaire

Dans ce mémoire, on propose d'une part une méthode de résolution pour le problème du minimax dynamique stochastique et on présente d'autre part l'application de cet algorithme à un problème d'optimisation de portefeuille.

Dans un contexte d'appariement entre l'actif et le passif sur un horizon fuyant, on introduit un modèle pour la solution du problème de répartition de l'actif d'un portefeuille d'investissements. Une analyse de sensibilité sur une instance de ce problème dynamique stochastique dans un tel contexte démontre que la décision d'investissement est très sensible aux évaluations des probabilités qui entrent dans le calcul de l'espérance mathématique de l'objectif.

L'approche du minimax dynamique stochastique est proposée pour pallier aux imperfections du modèle précédent lorsque le décideur n'a pas une connaissance parfaite de la distribution des probabilités des états futurs. Le minimax s'apparente à un jeu contre la nature et sa solution fournit une stratégie de placement garantissant une espérance de gain maximale par rapport à la pire des distributions de probabilités.

Ce mémoire présente donc à la fois un modèle de décision et une méthode de calcul permettant de déterminer une stratégie lorsque le décideur a une connaissance imparfaite des distributions de probabilité des états futurs de la nature.

Remerciements

J'aimerais remercier chaleureusement mes directeurs de recherche : Michèle Breton et Saeb El Hachem sans qui ce travail n'aurait pas été possible. Je tiens aussi à remercier Patrick Soriano et Fabien Chauny pour les conseils promulgués. Finalement, j'aimerais remercier le CRSNG et la Chaire de gestion des risques de l'École des HEC pour leur support financier.

Table des matières

SOMMAIRE.....	I
REMERCIEMENTS	II
TABLE DES MATIÈRES	III
LISTE DES TABLEAUX.....	IV
LISTE DES FIGURES	V
1. INTRODUCTION.....	1
2. REVUE DE LA LITTÉRATURE.....	4
2.1 LES MODÈLES STATIQUES	4
2.1.1 <i>Modèle moyenne-variance</i>	4
2.1.2 <i>Introduction de l'asymétrie dans le modèle M-V</i>	5
2.1.3 <i>Adaptation du modèle M-V à une demande aléatoire</i>	8
2.2 LES MODÈLES DYNAMIQUES DÉTERMINISTES.....	9
2.2.1 <i>Extension multi-périodes du modèle M-V</i>	9
2.2.2 <i>Utilisation des techniques de réseaux pour la gestion de l'actif</i>	10
2.3 LES MODÈLES DYNAMIQUES STOCHASTIQUES.....	12
2.3.1 <i>Utilisation des techniques de réseaux pour la gestion de l'actif</i>	12
2.3.2 <i>Un modèle multi-périodes linéaire de gestion de l'actif</i>	14
2.3.3 <i>Des modèles de gestion de l'actif et du passif pour une banque</i>	15
2.3.4 <i>Le modèle de Russell-Yasuda Kasai [5] et ses répercussions</i>	17
2.3.5 <i>La notion d'arbitrage au sein des modèles de gestion de l'actif et du passif</i>	19
3. APPROCHE MINIMAX DYNAMIQUE STOCHASTIQUE.....	23
3.1 LE MODÈLE DU MINIMAX DYNAMIQUE STOCHASTIQUE.....	23
3.1.1 <i>Une formulation d'un modèle linéaire dynamique stochastique</i>	23
3.1.2 <i>Information statistique incomplète</i>	24
3.1.3 <i>Formulation du minimax dynamique stochastique</i>	25
3.2 UN ALGORITHME DE RÉOLUTION.....	25
3.2.1 <i>Algorithme de résolution</i>	26
3.2.2 <i>Complexité de l'algorithme</i>	30
3.2.3 <i>Un exemple numérique simple</i>	31
4. MODÈLE DE GESTION DE L'ACTIF ET DU PASSIF.....	33
5. ANALYSE DES RÉSULTATS.....	37
5.1 ANALYSE DE SENSIBILITÉ	37
5.2 RÉSULTATS NUMÉRIQUES	38
6. CONCLUSION	41
BIBLIOGRAPHIE.....	42

Liste des tableaux

<i>Tableau 1</i>	40
------------------------	----

Liste des figures

<i>Figure 1</i>	5
<i>Figure 2</i>	6
<i>Figure 3</i>	8
<i>Figure 4</i>	11
<i>Figure 5</i>	13
<i>Figure 6</i>	20
<i>Figure 7</i>	20
<i>Figure 8</i>	21
<i>Figure 9</i>	21
<i>Figure 10</i>	32
<i>Figure 11</i>	36

1. Introduction

Actuellement, les principaux intermédiaires financiers sont les maisons de courtage, les banques et les compagnies d'assurances. De telles entreprises nécessitent une gestion efficace afin d'obtenir un gain synchronisé des placements de leurs actifs pour assurer les paiements périodiques de leurs passifs. Cependant, lorsque ce gain n'est pas suffisant, on assiste à un découvert financier qui engendre des coûts supplémentaires pour l'entreprise. Puisque le but de cette dernière est de maximiser les profits, les dirigeants peuvent utiliser des techniques d'aide à la décision pour minimiser les pertes causées par ces découverts. Pour un problème d'appariement de l'actif et du passif soumis à diverses contraintes de réglementations sur les entrées et sorties de fonds, l'utilisation d'un modèle mathématique semble un moyen adéquat d'aide à la décision.

La plupart des modèles que l'on retrouve dans le domaine de l'intermédiation financière reposent sur des hypothèses fortes qui ne représentent pas toujours adéquatement la réalité. Par exemple, une approche peu appropriée pour un problème d'appariement de l'actif et du passif serait de modéliser le problème en contexte statique. En effet, dans un modèle monopériode, on prend une seule et unique décision pour tout l'horizon de planification ce qui est peu conforme à la réalité pour ce type de problèmes puisque les gestionnaires rééquilibrent sans arrêt leurs portefeuilles.

Un second type de modèle que l'on peut considérer est le dynamique déterministe. Dans celui-ci, c'est plutôt une séquence de décisions qui est prise. D'un état donné, on prend une décision dont on connaît avec certitude l'impact sur l'état futur à partir duquel on reprend une nouvelle décision. L'approche dynamique est appropriée lorsque les décisions prises à une période quelconque affectent les décisions futures qui seront prises comme dans le cas du problème de l'appariement de l'actif et du passif. Par contre, il est clair que ce type d'approche n'est pas tout à fait réaliste dans le domaine de l'intermédiation financière puisque les dirigeants rebalancent leurs portefeuilles conformément à l'évolution et à la

révélation progressive des événements aléatoires influençant les rendements de ces portefeuilles.

La troisième sorte de modèle que l'on peut observer est le dynamique stochastique. Il généralise le précédent en permettant aux décisions de s'adapter aux événements dont on ne connaît pas avec certitude l'occurrence. Une hypothèse forte posée dans ces modèles consiste à considérer que toute l'information sur la distribution des variables aléatoires est connue. En effet, certains modèles utilisent une distribution de probabilité conjointe de variables aléatoires d'où sont déduites les probabilités de réalisation des états futurs. D'autres ne considèrent que quelques scénarios représentatifs affectés de probabilités subjectives, introduisant ainsi une marge d'erreur possiblement grande.

Selon Breton et El Hachem [1,2], Dupacova [8] et Zackova [28], une alternative possible consiste à considérer un problème dans un contexte de programmation dynamique stochastique avec une connaissance partielle de l'information sur la distribution de probabilité des états futurs. On considère une classe entière de distributions de probabilité conjointes possibles qui est compatible avec l'information disponible sur les données aléatoires. Cette classe de distributions est décrite par des contraintes mathématiques modélisant l'information fournie. L'approche du minimax dynamique stochastique est une sorte de jeu contre la nature dans lequel le décideur maximise l'espérance de son gain en agissant sur les variables qu'il contrôle tandis que la nature minimise le même objectif par rapport aux distributions de probabilité faisant partie de cette classe.

Dans ce mémoire, on développera dans un premier temps un algorithme permettant de résoudre le problème du minimax dynamique stochastique. On étudiera ensuite l'application de cette approche pour la résolution d'un problème d'appariement de l'actif et du passif lorsque l'on a une connaissance partielle de la distribution de probabilité des états futurs.

En utilisant cette approche, la solution obtenue assure une borne inférieure sur l'espérance du gain d'un portefeuille d'actifs. En effet, il ne peut pas y avoir de cas plus bas puisque l'on optimise ce portefeuille pour la pire distribution de

probabilité des états futurs appartenant à la classe. Le modèle construit est souple puisqu'il relâche l'hypothèse forte d'une connaissance parfaite de la distribution de probabilité des états futurs. De plus, si le problème d'appariement de l'actif et du passif s'avère sensible aux changements dans ces probabilités alors la solution du minimax dynamique stochastique constitue une alternative d'investissement intéressante.

Afin de réaliser le travail, on doit tout d'abord définir un problème d'appariement de l'actif et du passif suffisamment réaliste pour que l'on puisse l'analyser et lui appliquer l'approche du minimax dynamique stochastique. En contexte d'information parfaite sur les probabilités, on maximisera le gain espéré du portefeuille d'actifs de façon à optimiser le surplus tout en respectant les contraintes représentant la réglementation et les variations permises sur les entrées et sorties de fonds. Par la suite, on effectuera une analyse de sensibilité afin de constater les effets de changements dans les probabilités sur la stratégie d'investissement. Finalement, on appliquera l'approche du minimax dynamique stochastique afin d'obtenir une politique de décision en contexte d'information imparfaite sur les probabilités des états futurs.

Dans le prochain chapitre, on présente une brève revue de la littérature financière portant sur la gestion de portefeuille. Dans le chapitre trois, on introduit l'approche du minimax dynamique stochastique ainsi qu'un algorithme qui permet de résoudre un tel problème. Le chapitre quatre contient l'ensemble des détails relatifs au modèle d'appariement de l'actif et du passif. En ce qui concerne le cinquième chapitre, on effectue d'une part une analyse de sensibilité du problème par rapport aux changements de probabilités et d'autre part, on présente les résultats numériques obtenus par l'algorithme de résolution. Finalement, le chapitre six contient les conclusions que peut apporter ce mémoire.

2. Revue de la littérature

Dans ce chapitre, on couvre une partie de la littérature financière portant sur la gestion de portefeuille en insistant particulièrement sur les modèles mathématiques. Chaque section regroupe par catégorie un ensemble de modèles de gestion de portefeuille.

2.1 Les modèles statiques

2.1.1 Modèle moyenne-variance

Le modèle moyenne-variance ($M-V$) a été conçu par un des pères de la théorie de la gestion de portefeuille, soit H.M. Markowitz [17,18]. L'argumentation de ce dernier se fonde principalement sur le fait qu'une simple règle d'espérance actualisée des rendements ne permet pas à un investisseur rationnel ayant de l'aversion pour le risque de préférer un portefeuille plus diversifié à un qui ne l'est pas. Markowitz introduit alors une règle basée sur un critère $M-V$. Selon ce principe, il est possible d'identifier un portefeuille avec une variance minimale pour une espérance donnée ou inversement, avec une espérance maximale pour une variance donnée. Le modèle est le suivant :

$$\text{Min } \left\{ V(r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{i,j} x_i x_j \right\} \quad (2.1.1.a)$$

$$\text{s.c. } E(r) = \sum_{i=1}^N \mu_i x_i = K, \quad (2.1.1.b)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad (2.1.1.c)$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

- où
- r est le rendement du portefeuille d'actifs,
 - x_i est la proportion de la richesse investie dans le titre i ,
 - μ_i est l'espérance du rendement du titre risqué i ,
 - $\sigma_{i,j}$ est la covariance du rendement entre les titres i et j ,
 - K est l'espérance cible et
 - N est le nombre de titres risqués considérés.

Dans ce modèle, (2.1.1.a) correspond à la minimisation de la variance du portefeuille d'actifs, (2.1.1.b) indique que l'espérance de ce portefeuille est fixée à une valeur K et finalement (2.1.1.c) contraint le modèle à ne pas admettre de vente ou d'achat à découvert. Par exemple, on peut résoudre ce problème de programmation quadratique convexe avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On trace alors la frontière efficiente dans l'espace $M-V$ en faisant varier la valeur de K . Selon la tolérance au risque de l'investisseur, on lui assigne un portefeuille dont la variance est minimale pour un rendement espéré fixé.

En plus de ne pas inclure des frais de transactions, cette modélisation représente entièrement l'intérêt des investisseurs par les deux premiers moments de la distribution des rendements du portefeuille. Les investisseurs ont généralement une préférence pour un portefeuille avec un troisième moment plus grand si l'espérance et la variance sont les mêmes.

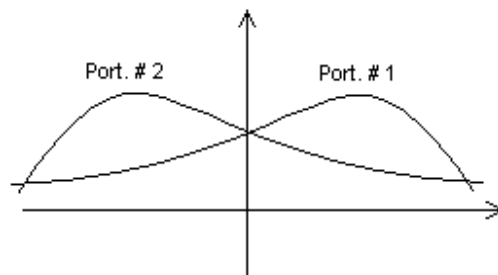


Figure 1. Cette figure représente les distributions de probabilité des rendements de deux portefeuilles distincts qui ont la même espérance et variance. Cependant, le troisième moment du portefeuille 1 est plus grand que celui du portefeuille 2. Il est clair que tout investisseur rationnel choisira le portefeuille 1 parce que la probabilité d'avoir un rendement au-dessus de la moyenne est plus grande que s'il choisit le portefeuille 2.

Cependant, il est important de noter que Markowitz suggère aussi une mesure de semie-variance comme critère définissant le risque qui ne pénalise que les rendements du portefeuille inférieurs à la moyenne.

2.1.2 Introduction de l'asymétrie dans le modèle $M-V$

Afin de contourner ce problème, King [11] propose pour sa part une classe de fonctions linéaires-quadratiques par morceaux représentant à la fois un critère de choix d'une distribution de probabilité asymétrique du rendement d'un portefeuille

ainsi que les attributs de la fonction d'utilité de l'investisseur. Cette classe est décrite de la façon suivante :

$$\rho_{q^-,q^+}(r) = \begin{cases} q^-r - 0.5(q^-)^2 & \text{si } r \leq q^- \\ 0.5r^2 & \text{si } q^- < r < q^+ \\ q^+r - 0.5(q^+)^2 & \text{si } q^+ \leq r \end{cases}$$

- où • q^+ est le paramètre qui définit la pente «à droite»,
 • q^- est le paramètre qui définit la pente «à gauche» et
 • r est le rendement du portefeuille d'actif.

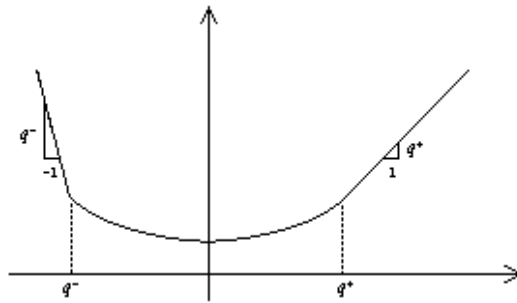


Figure 2. Cette figure représente la fonction $\rho_{q^-,q^+}(r)$. Si $r \leq q^-$ alors on a une droite de pente q^- . Si $q^- < r < q^+$ alors on a la parabole $0.5r^2$. Finalement, si $q^+ \leq r$ alors on a une droite de pente positive q^+ .

En utilisant la même méthodologie que Levy et Markowitz [16], King évalue l'espérance de l'utilité d'un investisseur rationnel en fonction des deux premiers moments du rendement du portefeuille d'actifs. Toutefois, il remplace le terme quadratique de la variance de ce rendement par la fonction $\rho_{q^-,q^+}(r)$ rendant ainsi l'approximation conforme à la réalité d'un monde asymétrique.

Dans le même esprit, Konno, Shirakawa et Yamazaki [14] développent le modèle $M-V$ incluant le troisième moment pour un investisseur rationnel. À cette fin, ils approchent la fonction d'utilité selon la même dérivation que Levy et Markowitz avec un développement de Taylor du troisième ordre. Dans sa forme la plus générale, le modèle s'écrit :

$$\text{Max } E\left([r - E(r)]^3\right) \quad (2.1.2.a)$$

$$\text{s.c. } E(r) = \sum_{i=1}^N \mu_i x_i = K, \quad (2.1.2.b)$$

$$V(r) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{i,j} x_i x_j = L \quad (2.1.2.c)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad (2.1.2.d)$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

- où • r est le rendement du portefeuille d'actif,
 • x_i est la proportion de la richesse investie dans le titre i ,
 • μ_i est l'espérance du rendement du titre risqué i ,
 • $\sigma_{i,j}$ est la covariance entre les titres i et j ,
 • K est l'espérance cible,
 • L est la variance cible et
 • N est le nombre de titres risqués considérés.

Dans ce modèle, (2.1.2.a) correspond à la maximisation du coefficient d'asymétrie du portefeuille d'actifs, (2.1.2.b) et (2.1.2.c) indiquent que le portefeuille a une espérance et une variance fixée et finalement (2.1.2.d) représente le fait que le modèle n'admet pas d'achat ou de vente à découvert. Cependant, on ne peut pas trouver de maximum global à ce problème par les techniques usuelles de la programmation non-linéaire puisque la fonction objectif n'est pas concave et que le domaine n'est pas convexe par la présence de la contrainte sur la variance. Afin de contourner ces difficultés, les auteurs introduisent une fonction de semi-troisième moment négatif défini par :

$$\gamma_{-}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r - E(r) \geq 0 \\ E\left([r - E(r)]^3\right) & \text{si } r - E(r) < 0 \end{cases}$$

et ils remplacent le terme de la variance par un écart à la moyenne défini par :

$$W(r) = E\left[|r - E(r)|\right].$$

Après avoir remplacé ces termes dans le modèle général, ils solutionnent le problème par les techniques de programmation non-linéaire. Toutefois, les auteurs indiquent que ces techniques deviennent inadéquates lorsque le nombre d'actifs en jeu est supérieur à 1000. Ils linéarisent alors la fonction objectif et ils utilisent l'algorithme du simplexe afin de résoudre le problème linéarisé.

2.1.3 Adaptation du modèle $M-V$ à une demande aléatoire

Dans une perspective différente, d'autres chercheurs continuent leurs travaux afin d'améliorer le modèle $M-V$. Parmi eux, Chen [6] développe un modèle monopériode semblable à celui de Markowitz tout en considérant le fait que l'investisseur rationnel puisse faire face, à la fin de la période d'investissement, à une demande aléatoire pour son argent. En supposant des coûts de liquidation asymétriques, c'est-à-dire un coût plus élevé pour liquider un actif risqué qu'un actif sans risque, l'auteur définit la fonction des coûts de transfert de la façon suivante :

$$\Phi(\tilde{D}) = \begin{cases} C_2(\tilde{D} - BR_f P) + C_1 BR_f P & \text{si } \tilde{D} > BR_f P \\ C_1 \tilde{D} & \text{si } 0 \leq \tilde{D} \leq BR_f P \\ 0 & \text{si } \tilde{D} < 0 \end{cases}$$

- où
- B est le montant d'actif sans risque détenu au début de la période par l'investisseur,
 - C_1 est le coût de transfert afin d'obtenir un dollar provenant de l'actif sans risque,
 - C_2 est le coût de transfert afin d'obtenir un dollar provenant de l'actif risqué,
 - \tilde{D} est une demande aléatoire pour son argent,
 - P est la proportion d'actif net qui reste de l'actif sans risque et
 - R_f est le taux sans risque.

La figure suivante permet d'illustrer la fonction $\Phi(\tilde{D})$:

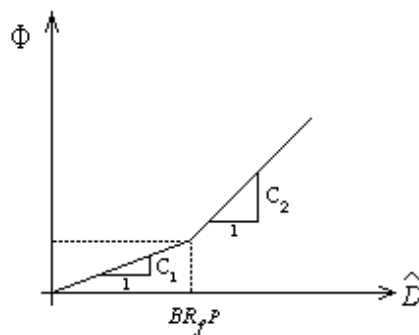


Figure 3. Cette figure représente la fonction asymétrique des coûts de transferts par rapport à la demande aléatoire de l'investisseur pour son argent.

L'espérance et la variance du rendement d'un portefeuille composé de N actifs risqués et d'un actif sans risque deviennent alors respectivement :

$$E(r) = BR_f + X^T \mu - E(\Phi(\tilde{D})) \text{ et } V(r) = X^T V X - 2X^T W(\Phi(\tilde{D})) + V(\Phi(\tilde{D}))$$

où • r est le rendement du portefeuille d'actif,

- μ est un vecteur appartenant à \mathfrak{R}^N représentant les espérances de rendement sur ces actifs risqués,
- V est la matrice de covariance entre chaque titre risqué élément de $\mathfrak{R}^N \times \mathfrak{R}^N$,
- $W(\tilde{\Phi})$ est le vecteur de covariance entre les actifs risqués et $\tilde{\Phi}$ qui appartient à \mathfrak{R}^N et
- X est un vecteur de \mathfrak{R}^N représentant les investissements dans chaque actif risqué.

Avec ces équations ajustées, le modèle de Chen est exactement semblable à celui de Markowitz. En résolvant ce problème par le Lagrangien, on constate la complexité qu'amène la demande stochastique d'argent : la fonction objectif quadratique n'est plus séparable. Afin de remédier à cette difficulté, l'auteur construit un modèle factorisant les rendements et la demande stochastique par rapport à un index de marché.

Dans un contexte de gestion dynamique de portefeuille, ces modèles statiques sont loin d'être parfaits. En effet, l'investisseur détermine le poids (x_i) de chaque titre au début de l'horizon, observe la réalisation des variables aléatoires et encaisse son capital ainsi que les rendements à l'échéance. On constate qu'une telle approche ne saisit pas les effets des décisions qui peuvent survenir après l'horizon puisque l'on suppose le retrait entier du capital à l'échéance.

2.2 Les modèles dynamiques déterministes

L'utilisation de modèles dynamiques déterministes permet de capter les effets qu'une décision d'investissement dans un actif quelconque peut avoir sur l'ensemble des décisions subséquentes.

2.2.1 Extension multi-périodes du modèle $M-V$

Gressis, Phillipatos et Hayya [10] développent un modèle de k périodes dont le but est de maximiser l'utilité de la richesse finale d'un investisseur rationnel. Toutefois, cet investisseur doit réajuster automatiquement le poids des titres au début de chaque période de façon à conserver les proportions initiales. Par

ailleurs, en suivant un résultat de Tobin [25,26] qui mentionne que les distributions futures des rendements des titres sont stationnaires dans le temps (c'est-à-dire indépendantes et identiquement distribuées), les auteurs définissent le rendement espéré ainsi que la variance de chaque titre pour les k périodes de la façon suivante :

$$\mu_{(k)} = \mu^k \quad \text{et} \quad \sigma_{(k)}^2 = (\sigma^2 + \mu^2)^k - \mu^{2k}$$

- où • μ est la moyenne de la distribution d'un titre à la première période et
 • σ^2 est la variance de la distribution d'un titre à la première période.

Avec cette construction, il existe un monomorphisme entre un point de l'espace $[\mu, \sigma^2]$ et $[\mu_{(k)}, \sigma_{(k)}^2]$. Alors, un portefeuille obtenu par le modèle de Markowitz est efficient si et seulement si ce même portefeuille est efficient lorsqu'il est obtenu par le modèle multi-périodes. En plus de partager les mêmes propriétés que celles du modèle $M-V$, les auteurs obtiennent le résultat supplémentaire que plus l'horizon de planification est rapproché, plus l'investisseur rationnel a tendance à choisir un portefeuille risqué et vice-versa.

On remarque que toutes les propriétés du modèle de Gressis, Phillipatos et Hayya découlent de la stationnarité des distributions futures des rendements. Or, Stevens [24] trouve un contre-exemple au théorème de Tobin et remet en cause la légitimité de cette hypothèse. Incidemment, l'extension multi-périodes du modèle de Markowitz présentée par ces auteurs n'est plus parfaite.

2.2.2 Utilisation des techniques de réseaux pour la gestion de l'actif

Jusqu'à présent, tous les modèles présentés n'exploitent pas la structure de réseau qui peut leur être associée.

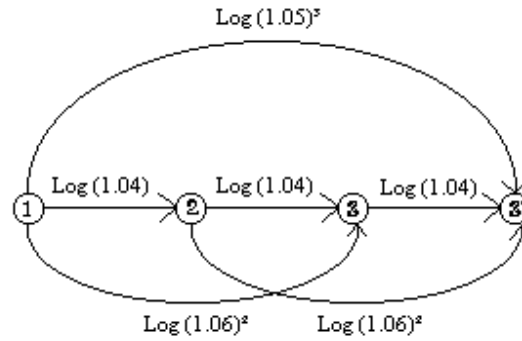


Figure 4. Cette figure représente le cas d'un individu qui a le choix d'investir dans trois types d'obligations. Ces obligations ont soit une échéance d'une, deux ou trois années avec des rendements de 4%, 6% et 5% respectivement. En utilisant les logarithmes des rendements, le problème de maximisation devient alors le problème du plus long chemin entre le moment initial 1 et l'échéance 3'.

Les auteurs Golden et Keating [9] utilisent une structure de réseau pour représenter un modèle multi-périodes dynamique déterministe d'allocation des actifs pour un investisseur rationnel. En effet, ils considèrent le problème qui consiste à maximiser les flux des rendements espérés sur tous les arcs d'un réseau tout en conservant la variance de ces flux sous une borne prédéterminée γ . Dans sa forme la plus générale, le modèle s'écrit :

$$\text{Max } \left\{ E(r) = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i \right\} \quad (2.2.2.a)$$

$$\text{s.c. } \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_{i,j} x_i x_j \leq \gamma, \quad (2.2.2.b)$$

$$\sum_{i \in A_j} x_i - \sum_{i \in A'_j} x_i = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (2.2.2.c)$$

$$\sum_{i \in A_1} x_i = 1, \quad (2.2.2.d)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- où
- m est le nombre d'arcs sur le réseau,
 - n est le nombre de périodes de temps,
 - x_i est la portion d'un dollar investie sur l'arc i ,
 - γ est la tolérance maximale par rapport à la variance,
 - $\mu_i = E(R_i)$ où R_i représente le rendement aléatoire sur l'arc i ,
 - $\sigma_{i,j}$ est la covariance entre R_i et R_j ,
 - A_j est l'ensemble des arcs ayant comme nœud d'origine j et
 - A'_j est l'ensemble des arcs ayant comme nœud de destination j .

Dans cette modélisation, (2.2.2.a) correspond à la maximisation du rendement du portefeuille d'actifs, (2.2.2.b) indique que la variance de ce portefeuille ne doit pas

dépasser le seuil γ , (2.2.2.c) modélise le fait que le capital disponible à un nœud quelconque doit être totalement réinvesti dans les différents actifs accessibles de ce même nœud et finalement (2.2.2.d) contraint le modèle à ne pas admettre de vente ou d'achat à découvert. Les auteurs supposent toutefois que les gains des investissements réalisés lors de la période de planification ne sont pas réinvestis dans différents actifs ce qui allège ainsi la structure du réseau et ils omettent d'inclure dans la modélisation des frais de transactions.

Afin d'obtenir un problème de programmation quadratique, Golden et Keating utilisent la méthode des multiplicateurs de Lagrange et insèrent la contrainte de la variance dans la fonction objectif. Puisqu'une matrice de variance/covariance est toujours semie-définie positive, le Lagrangien a alors la propriété d'être concave. Incidemment, l'utilisation par les auteurs d'une méthode itérative d'approximation linéaire et la mise à jour des multiplicateurs converge vers l'optimum global.

Ces deux modèles dynamiques, tout comme ceux de la section 2.1, présument que l'on connaît la moyenne du rendement de chaque titre (μ_i) ainsi que les covariances ($\sigma_{i,j}$) entre chacun d'entre eux. En réalité, la moyenne et la variance d'un titre quelconque sont généralement estimées à partir de données historiques. Les paramètres utilisés dans ces modèles sont donc des estimations.

2.3 Les modèles dynamiques stochastiques

Dans cette section, on présente quelques modèles dynamiques stochastiques utilisés en gestion de portefeuille qui utilisent des prévisions plus détaillées, quant aux états futurs de ce portefeuille, que les simples moments de leurs distributions.

2.3.1 Utilisation des techniques de réseaux pour la gestion de l'actif

L'originalité de l'approche via un réseau de Golden et Keating attire l'attention de plusieurs chercheurs intéressés à approfondir le domaine. Plus particulièrement, Mulvey et Vladimirou [21] considèrent la question en introduisant un réseau stochastique généralisé incluant des frais de transactions pour des problèmes de

planification financière en présence d'incertitude. Ils définissent un modèle multi-périodes dynamique stochastique qui représente le problème d'un investisseur rationnel cherchant à maximiser l'espérance de sa fonction d'utilité. Les auteurs caractérisent l'incertitude par des scénarios multiples dont chacun représente une réalisation, sur tout l'horizon, des valeurs futures que peuvent prendre les variables aléatoires. La représentation des scénarios se fait souvent par un arbre :

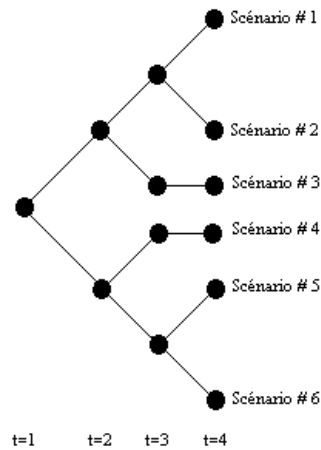


Figure 5. Arbre de scénarios.

Cependant, la structure dynamique du modèle requiert que chaque scénario respecte les contraintes de non-anticipativité. Autrement dit, si deux scénarios à la date t ont le même passé alors la décision prise à la date t , pour chacun de ces deux scénarios, doit être la même. Dans l'illustration précédente, à $t = 2$, les scénarios 4, 5 et 6 ont tous le même passé et donc on doit avoir $x_{4_2} = x_{5_2} = x_{6_2}$ où x_{s_t} représente le vecteur de décisions prises à la date t pour le scénario s .

Mulvey et Vladimirou utilisent une méthode développée par Rockafellar et Wets [23] qui s'intitule «Progressive Hedging Algorithm» afin de résoudre ce modèle. Ainsi, ils décomposent le problème en plusieurs sous-problèmes déterministes, chacun correspondant à un scénario. La décomposition désirée est obtenue en dualisant les contraintes de non-anticipativité incorporant par le fait même une pénalité dans la fonction objectif. Avec cette construction duale, on obtient la solution de chaque sous-problème associé à un scénario par des techniques spécialisées de résolution sur un réseau. Cependant, chaque solution individuelle viole généralement les contraintes de non-anticipativité. Conséquemment, les

multiplicateurs de la pénalité sont itérativement mis à jours afin de renforcer progressivement ces contraintes et permettre l'implantation de la solution.

2.3.2 Un modèle multi-périodes linéaire de gestion de l'actif

Dantzig et Infanger [7] développent un modèle multi-périodes linéaire dynamique stochastique de gestion de l'actif avec N titres financiers risqués et un titre sans risque. Le modèle s'écrit de la façon suivante :

$$\text{Max } E \left(U \left(\sum_{i=1}^{N+1} r_{i=T} x_{i=T} \right) \right) \quad (2.3.2.a)$$

$$\text{s.c. } x_i + y_i - z_i - r_{i-1} x_{i-1} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (2.3.2.b)$$

$$x_{(N+1)_t} - \sum_{i=1}^N (1 - a_i) y_i + \sum_{i=1}^N (1 + b_i) z_i - r_{(N+1)_{t-1}} x_{(N+1)_{t-1}} = 0, \quad (2.3.2.c)$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \\ \underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i \\ \underline{z}_i \leq z_i \leq \bar{z}_i \end{array} \right\} \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ et } \forall t \in \{1, 2, \dots, T\}, \quad (2.3.2.d)$$

$$r_{i=0} \text{ est donné } \forall i \in \{1, 2, \dots, N, N+1\} \quad (2.3.2.e)$$

- où
- a_i est le taux constant de frais de transactions pour la vente de l'actif i ,
 - b_i est le taux constant de frais de transactions pour l'achat de l'actif i ,
 - r_i est le rendement réalisé de l'actif i à la date t de la distribution aléatoire R_i^t ,
 - x_i est une variable de décision représentant le capital investi dans le titre i à la date t ,
 - y_i est une variable de décision représentant le capital vendu du titre i à la date t et
 - z_i est une variable de décision représentant le capital acheté du titre i à la date t .

Dans cette modélisation, (2.3.2.a) correspond à la maximisation de l'espérance de l'utilité de la richesse finale de l'investisseur, (2.3.2.b) indique pour un actif risqué quelconque que les gains des investissements de la période précédente augmentés des achats ou diminués des ventes représentent le capital investi dans cet actif pour la période en cours, (2.3.2.c) modélise l'ensemble des transactions faites dans le compte bancaire où tous les frais de transactions sont comptabilisés, (2.3.2.d) contraint le modèle à ne pas dépasser certaines bornes au niveau des variables de

décisions et finalement (2.3.2.e) introduit les rendements initiaux de l'ensemble des actifs.

Malgré une modélisation plus souple, Dantzig et Infanger supposent que la fonction d'utilité de l'investisseur peut être approximée par une fonction linéaire par morceaux, ce qui permet d'écrire le problème d'optimisation sous forme linéaire. De plus, ils montrent que cette construction est équivalente à un modèle multi-étapes linéaire stochastique qui utilise la stratégie «wait-and-see» et dont les contraintes de non-anticipativité sont implicitement incluses dans la formulation. Après avoir établi que le problème stochastique est de recours complet, les auteurs discrétisent la distribution conjointe des variables aléatoires par le biais d'un échantillon de scénarios représentatifs et ils utilisent la décomposition de Benders.

2.3.3 Des modèles de gestion de l'actif et du passif pour une banque

Un des premiers chercheurs à appliquer un modèle de gestion de l'actif et du passif à une banque est Brodt [4]. En se basant sur la théorie du modèle $M-V$, il développe un modèle dynamique stochastique où l'incertitude est représentée par 21 scénarios évoquant les situations économiques actuelles et futures. Afin de rendre linéaire l'objectif du modèle, le risque de profit est mesuré par une déviation absolue par rapport à la moyenne des profits (MAD). L'auteur introduit deux variables P_s^{d+} et P_s^{d-} représentant respectivement la déviation positive et négative par rapport au premier moment. La formulation générale du modèle s'écrit comme suit :

$$\text{Min } \sum_{s \in S} p_s [P_s^{d+} + P_s^{d-}] \quad (2.3.3.a)$$

$$\text{s.c. } E(P^d) = EPG, \quad (2.3.3.b)$$

$$(P_s^d - EPG)_+ P_s^{d-} - P_s^{d+} = 0, \quad (2.3.3.c)$$

$$\text{les contraintes intertemporelles,} \quad (2.3.3.d)$$

$$\text{les contraintes intratemporelles,} \quad (2.3.3.e)$$

$$\text{les contraintes de non-négativité des variables}$$

- où • p_s représente la probabilité subjective d'occurrence du scénario s ,
 • EPG est un profit cible espéré et
 • P_s^d représente les profits actualisés lorsqu'une décision d est prise sous s .

Dans ce modèle, (2.3.3.a) correspond à la minimisation de la déviation absolue par rapport à la moyenne de profits, (2.3.3.b) indique que l'espérance du portefeuille est fixée à un niveau donné, (2.3.3.c) modélise la fonction qui sert à déterminer la déviation absolue, (2.3.3.d) représente les contraintes de non-anticipativité et finalement (2.3.3.e) contraint le modèle à respecter différents types de risque auxquels la banque peut s'exposer dont l'un est l'appariement de l'actif et du passif. La solution du modèle est obtenue par les techniques usuelles de la programmation linéaire. Pour différents niveaux de profits espérés, on trace une frontière efficiente dans l'espace $EPG \times MAD$. Selon l'aversion au risque du gestionnaire, on lui indique l'ensemble des décisions à prendre au bilan de manière à générer un profit espéré maximal.

Dans la même foulée, Ziemba et Kusy [27] développent un modèle multi-périodes linéaire stochastique pour un problème de gestion de l'actif et du passif d'une banque. L'aléa du modèle est constitué par le montant des dépôts et des retraits de chaque période. Les auteurs supposent que les rendements sur les actifs et les passifs sont connus de façon déterministe. Afin de modéliser l'aspect dynamique qu'a le problème, ils utilisent le cadre d'un modèle linéaire de deux étapes avec simple recours. La formulation générale d'un tel modèle est :

$$\text{Min}_{x \geq 0} \left\{ Z(x) = c'x + E_{\xi} \left[\min_{y^+, y^- \geq 0} (q^+ y_{\xi}^+ + q^- y_{\xi}^-) \right] \right\} \quad (2.3.3.f)$$

$$\text{s.c.} \quad Ax = b, \quad (2.3.3.g)$$

$$Tx + Iy_{\xi}^+ - Iy_{\xi}^- = \xi \quad (2.3.3.h)$$

- où
- c représente le vecteur de coefficients de la fonction objectif associé au vecteur x ,
 - q^+ et q^- sont des vecteurs représentant le coût encouru lorsqu'une action corrective est prise,
 - x représente le vecteur des décisions à prendre à la première étape,
 - y_{ξ}^+ et y_{ξ}^- sont des vecteurs représentant l'action corrective à prendre une fois que ξ se soit réalisé et
 - ξ est le vecteur d'événements aléatoires.

Dans ce modèle, (2.3.3.f) correspond à la minimisation de la somme des coûts engendrés par la décision de la première étape et de l'espérance des coûts futurs associés à une action corrective, (2.3.3.g) correspond à l'ensemble des contraintes associées aux variables de la première étape et finalement (2.3.3.h) contraint le modèle à respecter l'équilibre et la dépendance entre les variables de la première

et de la seconde étape. Dans le cadre du problème de gestion de l'actif et du passif pour une banque, un gestionnaire prend une décision initiale quant aux investissements à choisir pour les actifs. Il observe ensuite la réalisation du vecteur aléatoire ξ qui représente le montant des dépôts et des retraits et corrige finalement la position du portefeuille en payant une pénalité causée par les changements. Afin d'obtenir une solution au modèle avec simple recours, Ziemba et Kusy supposent que le support de la distribution de probabilité de ξ est fini. Ils concluent alors que $Z(x)$ est linéaire par morceaux et le modèle est solutionné par une méthode usuelle de la programmation linéaire.

Dans le but d'améliorer l'approche d'un modèle linéaire avec simple recours de deux étapes proposée par Kusy et Ziemba, Korhonen [15] modélise l'incertitude par 21 scénarios économiques qui incluent les variations probables des taux d'intérêts du marché. L'auteur développe alors un modèle linéaire semblable à celui de Ziemba et Kusy à l'exception près qu'il lève l'hypothèse des taux d'intérêts déterministes.

2.3.4 Le modèle de Russell-Yasuda Kasai [5] et ses répercussions

Outre les banques, les modèles de gestion de l'actif et du passif peuvent être adaptés à d'autres intermédiaires financiers tels que les compagnies d'assurances. L'un des principaux exemples de cette catégorie est celui de la compagnie japonaise Yasuda Kasai. La particularité de ce modèle provient de la définition du risque. Contrairement à une mesure traditionnelle de variance, les auteurs caractérisent le risque selon une mesure de découvert budgétaire résultant de la différence entre les gains sur les actifs et les paiements causés par les passifs. Il s'agit d'une mesure asymétrique puisque les surplus ne sont pas pénalisés par une telle approche. Par ailleurs, le modèle se fonde sur de multiples scénarios, chacun représentant une réalisation possible de l'évolution de l'économie. En omettant les contraintes modélisant la réglementation budgétaire, les variations permises sur les entrées et sorties de fonds, et celles de non-anticipativité, le modèle s'écrit :

$$\text{Max } E \left[V_T - \sum_{t=1}^T c_t(w_t) \right] \quad (2.3.4.a)$$

$$\text{s.c. } \sum_N x_{N_t} - V_t = 0, \quad t=1, \dots, T-1, \quad (2.3.4.b)$$

$$V_{t+1} - \sum_N (1 + RP_{N_{t+1}} + RI_{N_{t+1}}) x_{N_t} = F_{t+1} - P_{t+1} - I_{t+1}, \quad t=1, \dots, T-1 \quad (2.3.4.c)$$

$$\sum_N RI_{N_{t+1}} x_{N_t} + w_{t+1} - v_{t-1} = g_{t+1} L_t, \quad t=1, \dots, T-1, \quad (2.3.4.d)$$

$$(1 + g_{t+1}) L_t + F_{t+1} - P_{t+1} - I_{t+1} = L_{t+1}, \quad t=1, \dots, T-1, \quad (2.3.4.e)$$

les contraintes de non-négativité des variables

- où
- $c_t(w_t)$ est une fonction convexe et linéaire par morceaux représentant les pertes encourues à la date t du fait d'un découvert,
 - g_{t+1} représente le taux d'intérêt qui est crédité sur les polices d'assurances durant la période $[t, t+1]$,
 - v_t représente le surplus à la date t ,
 - w_t représente le découvert financier à la date t ,
 - x_{N_t} est la valeur au marché de l'actif N à la date t ,
 - F_{t+1} représente le flux d'entrées d'argent durant la période $[t, t+1]$,
 - I_{t+1} représente les paiements en intérêts durant la période $[t, t+1]$,
 - L_t représente la valeur des passifs à la date t ,
 - P_{t+1} représente le paiement du principal de la dette durant la période $[t, t+1]$,
 - $RI_{N_{t+1}}$ sont les rendements d'intérêts aléatoires de l'actif N durant la période $[t, t+1]$,
 - $RP_{N_{t+1}}$ sont les gains aléatoires de capital de l'actif N durant la période $[t, t+1]$ et
 - V_t est la valeur de l'entreprise à la date t calculée comme étant la somme des actifs.

Tout d'abord, (2.3.4.a) correspond à la maximisation de la valeur finale de l'entreprise tout en minimisant les pertes encourues par les découverts financiers, (2.3.4.b) représente les contraintes budgétaires, (2.3.4.c) exprime les relations d'accumulation d'actifs, (2.3.4.d) modélise les contraintes de découvert sur le revenu et finalement que (2.3.4.e) indique les relations d'accumulation des passifs. Avec une fonction objectif linéaire et un ensemble de contraintes linéaires, on trouve la solution par différents algorithmes traitant des problèmes linéaires de grande taille.

L'approche du modèle de Russell-Yasuda Kasai influence grandement le monde de la recherche avec une définition avant-gardiste et réaliste de la mesure de risque pour des problèmes de gestion de l'actif et du passif. En effet, Mulvey [20] utilise cette même définition afin de construire un modèle fondé sur quelques scénarios représentatifs ayant pour but la maximisation l'espérance de l'utilité du surplus à la fin de l'horizon. Dans ce contexte, le terme surplus représente la différence entre les gains sur les actifs et la valeur actuelle des paiements sur les passifs. L'auteur suppose que l'investisseur (ou le gestionnaire) est rationnel et que sa fonction d'utilité fait partie de la classe des fonctions isoélastiques. Afin de résoudre ce modèle, Mulvey utilise conjointement le «Progressive Hedging Algorithm» ainsi que les techniques de résolution sur un réseau telles que celles mentionnées dans l'article de Mulvey et Vladimirov [21] pour résoudre chaque sous-problème (voir sous-section 2.3.1).

2.3.5 La notion d'arbitrage au sein des modèles de gestion de l'actif et du passif

Un aspect important de la théorie financière, soit la notion d'arbitrage, est pratiquement ignoré dans chacun des modèles présentés jusqu'à présent. On appelle arbitrage la possibilité pour un investisseur de réaliser un gain espéré positif sans mise de fonds initiale et sans risque. Klaassen [12] démontre que si les prix futurs des actifs sélectionnés sont tels qu'il y a arbitrage, alors la politique de décision optimale peut présenter des biais substantiels. Dans un article subséquent de Klaassen [13], un problème d'appariement de l'actif et du passif est représenté par un modèle multi-périodes dynamique stochastique où l'incertitude est caractérisée par un ensemble de scénarios. Toutefois, afin de construire un arbre d'événements sans arbitrage, l'auteur utilise la caractérisation suivante pour le prix futur de chaque actif i , de chaque état n et de chaque période d'échange $t = 0, \dots, T - 1$:

$$S_{i,t}^n = P_t^n \sum_{n^+} \pi_{t/t+1}^{n/n^+} (S_{i,t+1}^{n^+} + D_{i,t+1}^{n^+})$$

- où
- $\pi_{t/t+1}^{n/n^+}$ est la probabilité risque-neutre de passer de l'état n à l'état n^+ ,
 - $D_{i,t+1}^{n^+}$ est le dividende versé à la fin de la période $t+1$ de l'actif i si l'état n^+ se réalise,
 - P_t^n est le prix de l'actif sans risque à l'état n à la date t ,

- $S_{i,t}^n$ est le prix ex-dividende de l'actif i à l'état n à la date t et
- $S_{i,t+1}^{n^+}$ est le prix ex-dividende de l'actif i à l'état n^+ (successeur de n) à la date $t+1$.

Cependant, afin de rendre le modèle plus simple à résoudre, Klaassen présente deux formes d'agrégation. La forme de l'arbre d'événements original est :

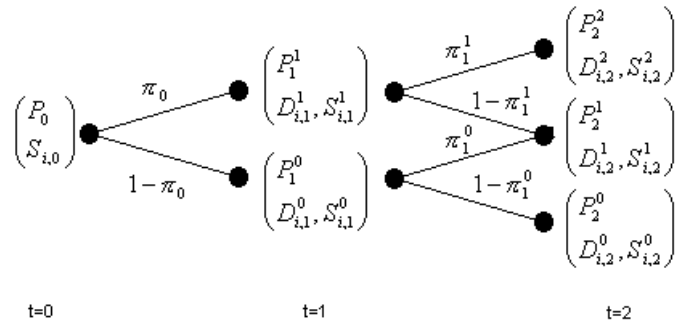


Figure 6. Cette figure représente un arbre d'événements sans aucune agrégation.

La première forme d'agrégation proposée par l'auteur est celle sur les états. On observe les modifications suivantes de l'arbre d'événements lorsqu'on effectue cette transformation à la date $t = 1$:

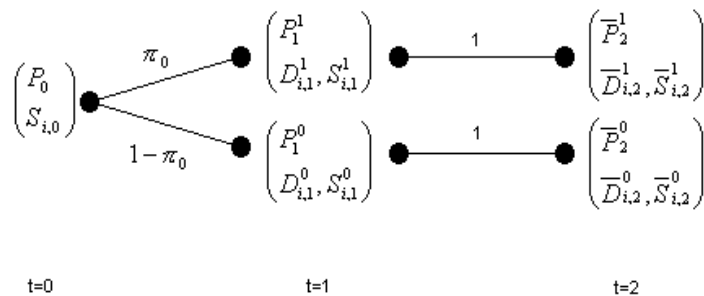


Figure 7. Cette figure représente un arbre d'événements avec une agrégation sur les états à $t=1$.

- où
- $\bar{D}_{i,2}^j \equiv \pi_1^j D_{i,2}^{j+1} + (1 - \pi_1^j) D_{i,2}^j$, $j = 0$ et 1 ,
 - $\bar{P}_2^j \equiv \pi_1^j P_2^{j+1} + (1 - \pi_1^j) P_2^j$, $j = 0$ et 1 et
 - $\bar{S}_{i,2}^j \equiv \pi_1^j S_{i,2}^{j+1} + (1 - \pi_1^j) S_{i,2}^j$, $j = 0$ et 1 .

Pareillement, on peut agréger à la date $t = 0$ à partir du résultat précédent :

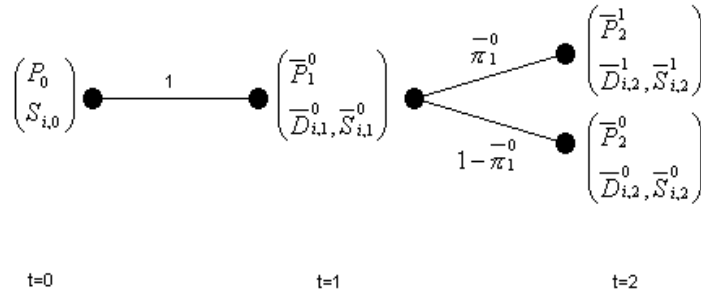


Figure 8. Cette figure représente un arbre d'événements avec une agrégation sur les états à $t=0$.

- où • $\bar{D}_{i,1}^0 \equiv \pi_0 D_{i,1}^1 + (1 - \pi_0) D_{i,1}^0$,
- $\bar{P}_1^0 \equiv \pi_0 P_1^1 + (1 - \pi_0) P_1^0$ et
- $\bar{S}_{i,1}^0 \equiv \pi_0 S_{i,1}^1 + (1 - \pi_0) S_{i,1}^0$.

Afin de conserver les prix des actifs à la date $t = 2$ sans arbitrage, la probabilité doit être risque-neutre et définie par $\bar{\pi}_0^1 \equiv (\pi_0 P_1^1) / \bar{P}_1^0$.

La seconde forme d'agrégation suggérée par Klaassen est celle sur les périodes. On observe les changements suivants de l'arbre précédent lorsqu'on effectue cette transformation à la date $t = 0$:

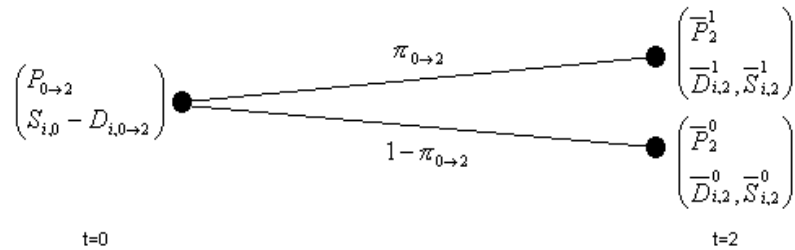


Figure 9. Cette figure représente un arbre d'événements avec une agrégation sur les périodes à $t=0$.

- où • $D_{i,0 \to 2} \equiv P_0 \bar{D}_{i,1}^0$, $P_{0 \to 2} \equiv P_0 \bar{P}_1^0$, $\pi_{0 \to 2} \equiv \bar{\pi}_1^0$ et
- $S_{i,0} = D_{i,0 \to 2} + P_{0 \to 2} \left(\pi_{0 \to 2} (\bar{D}_{i,2}^1 + \bar{S}_{i,2}^1) + (1 - \pi_{0 \to 2}) (\bar{D}_{i,2}^0 + \bar{S}_{i,2}^0) \right)$.

Une fois les agrégations effectuées sur l'arbre des événements, il est alors possible de résoudre le modèle réduit en utilisant les techniques usuelles de la programmation stochastique. La solution donne alors la politique optimale d'investissement à suivre lorsque l'on considère le contexte d'un problème

d'appariement de l'actif et du passif où l'arbre des scénarios n'admet pas d'arbitrage.

Dans cette section, on peut observer la présence d'une hypothèse forte posée par tous les auteurs mentionnés. En effet, ils présument une connaissance parfaite de la distribution de probabilité des états futurs. Certains auteurs comme Mulvey et Vladimirou, Dantzig et Infanger, Brodt, Korhonen, ceux du cas de Russell-Yasuda Kasai et Klaassen considèrent quelques scénarios représentatifs et leurs associent une probabilité d'occurrence. Si le problème est tel qu'il est sensible à ces probabilités, alors fonder une stratégie d'investissement sur cette estimation est risqué et peut-être inapproprié.

3. Approche minimax dynamique stochastique

Afin de relaxer l'hypothèse d'une connaissance parfaite de la distribution de probabilité des événements futurs, Breton et El Hachem [1,2], Dupacova [8] et Zackova [28] proposent l'approche du minimax dynamique stochastique. Dans ce chapitre, on introduit l'approche du minimax dynamique stochastique pour ensuite présenter une méthode qui permet d'obtenir une solution à cette approche.

3.1 Le modèle du minimax dynamique stochastique

Dans cette section, on présente tout d'abord une formulation d'un modèle d'optimisation linéaire dynamique stochastique. Ensuite, le concept d'information statistique incomplète est introduit pour finalement terminer par la présentation d'une formulation du modèle du minimax dynamique stochastique.

3.1.1 Une formulation d'un modèle linéaire dynamique stochastique

Soit un modèle linéaire dynamique stochastique dont l'ensemble des scénarios est S et ayant des étapes discrètes de décisions $t = 1, \dots, T$:

$$f(x) = (f_s(x_s))_{s \in S} = (f_s((x_{s_t})_{t=1, \dots, T}))_{s \in S}$$

- x_{s_t} correspond au vecteur de décisions prises à la date t sous le scénario s ,
- $f_s(x_s)$ est la fonction objectif (que l'on va supposer linéaire) si le scénario s se réalise et
- $f(x)$ est le vecteur des fonctions objectifs pour tous les scénarios.

De manière générale, on considère alors le problème :

$$\text{Max}_{x \in D} \langle p, f(x) \rangle$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ correspond au produit scalaire entre deux vecteurs,
- p est le vecteur $(p_s)_{s \in S}$ des probabilités de réalisation de chaque scénario (ce vecteur est donné),
- $\langle p, f(x) \rangle$ représente l'espérance mathématique des fonctions objectifs pour tous les scénarios s et
- D est le domaine réalisable du modèle (qui inclut les contraintes de non-anticipativité).

3.1.2 Information statistique incomplète

Une description partielle de la distribution de probabilité est souvent modélisée par des contraintes du type :

$$\alpha \leq \int_S g(s) dP(s) \leq \beta \quad (3.1.2.a)$$

- où • S est l'ensemble de tous les scénarios,
 • $g(s)$ est une fonction quelconque,
 • P est la distribution de probabilité inconnue et
 • α et β sont des constantes réelles.

L'ensemble des contraintes du même type que (3.1.2.a) modélisant toute l'information disponible définit une classe de distribution de probabilité appelée \wp . Sous l'hypothèse que le domaine de \wp est un ensemble connu S de cardinalité finie, une distribution de probabilité appartenant à \wp peut être identifiée avec un vecteur $p \in \mathfrak{R}^{\text{Card}(S)}$ et les contraintes modélisant l'information partielle prennent alors la forme :

$$\alpha \leq \sum_{s=1}^{\text{Card}(S)} g(s) p_s \leq \beta .$$

Les contraintes d'égalités sont modélisées en utilisant $\alpha = \beta$. Les relations ordinales sur les probabilités telles que :

$$p_s \leq p_{s'}, \quad p_s + p_{s'} \leq p_{s''} \quad \text{ou} \quad \alpha \leq p_s$$

sont modélisées en utilisant α et/ou $\beta \in \{-\infty, 0, +\infty\}$ et $g(s) \in \{-1, 0, 1\} \forall s \in S$.

Un choix judicieux de $g(s)$ permet d'introduire de l'information sur l'espérance, la variance ou tout autre moment d'ordre supérieur. Par exemple, si on pose $g(s) = s$ alors on permet d'introduire de l'information sur l'espérance. Il est cependant intéressant de noter que toutes les contraintes sont linéaires en p . Dans une formulation par scénarios, les contraintes supplémentaires suivantes doivent être ajoutées à la liste de celles modélisant l'information disponible :

$$\sum_{s \in S} p_s = 1 \quad \text{et} \quad p_s \geq 0 \quad \forall s \in S . \quad (3.1.2.b)$$

Puisque l'information partielle est donnée par des contraintes qui sont linéaires en p et que les contraintes (3.1.2.b) assurent que les variables sont bornées, alors la classe \wp est définie par un domaine polyédral borné.

3.1.3 Formulation du minimax dynamique stochastique

D'après la formulation précédente du modèle d'optimisation dynamique stochastique et en sachant que l'on a une connaissance partielle de la distribution de probabilité, une écriture possible du modèle du minimax dynamique stochastique est :

$$\text{Min}_{p \in \wp} \text{Max}_{x \in D} \langle p, f(x) \rangle \quad (3.1.3.a)$$

Cette dernière indique que le décideur veut maximiser l'espérance mathématique des fonctions objectifs de tous les scénarios par rapport aux variables de décision alors que la nature cherche à minimiser cette espérance maximale par rapport à la classe \wp qui décrit l'information partielle sur la distribution de probabilités des états futurs détenue par le décideur. Il s'agit donc d'un jeu contre la nature. Pour tout couple $\langle \bar{p}, f(\bar{x}) \rangle$, si le minimum et le maximum existent, l'inégalité suivante est toujours respectée :

$$\text{Min}_{p \in \wp} \langle p, f(\bar{x}) \rangle \leq \langle \bar{p}, f(\bar{x}) \rangle \leq \text{Max}_{x \in D} \langle \bar{p}, f(x) \rangle.$$

La solution (p^*, x^*) de (3.1.3.a) satisfait :

$$\text{Min}_{p \in \wp} \langle p, f(x^*) \rangle = \langle p^*, f(x^*) \rangle = \text{Max}_{x \in D} \langle p^*, f(x) \rangle \quad (3.1.3.b)$$

et est alors par définition un point de selle de la fonction $\langle p, f(x) \rangle$.

La construction du minimax dynamique stochastique s'apparente à celle de la dualité Lagrangienne. En effet, cette dernière tente de trouver un vecteur de multiplicateurs $\lambda \in \mathfrak{R}^m$ minimisant le maximum de la fonction de Lagrange $L(x, \lambda)$ qui est linéaire par rapport à λ . Toutefois, le minimax dynamique stochastique linéaire en p exige que $p \in \wp \subset \mathfrak{R}^{m^+}$.

3.2 Un algorithme de résolution

Dans cette section, on présente dans un premier temps un algorithme qui trouve une solution du problème du minimax dynamique stochastique. Par la suite, on discute de la complexité de cet algorithme pour finalement terminer la section avec un simple exemple illustrant la méthode.

3.2.1 Algorithme de résolution

Pour le problème $\text{Min}_{p \in \wp} \text{Max}_{x \in D} \langle p, f(x) \rangle$, on cherche à résoudre $\text{Min}_{p \in \wp} H(p)$ si on pose

$H(p) = \text{Max}_{x \in D} \langle p, f(x) \rangle$. La fonction $H(p)$ indique comment change la valeur

optimale de l'espérance mathématique des fonctions objectifs de tous les scénarios lorsqu'il y a un changement du vecteur de probabilité p .

Proposition 1 :

La fonction $H(p)$ est convexe, linéaire par morceaux et non-différentiable.

Démonstration :

1. La fonction $H(p)$ est convexe :

Soit $p_1, p_2 \in \wp$ quelconques et pour $\theta \in [0,1]$, il existe un \bar{x} tel que $H(\theta p_1 + (1-\theta)p_2) = \text{Max}_{x \in D} \langle \theta p_1 + (1-\theta)p_2, f(x) \rangle = \langle \theta p_1 + (1-\theta)p_2, f(\bar{x}) \rangle$. Or, $H(p_1) = \text{Max}_{x \in D} \langle p_1, f(x) \rangle \geq \langle p_1, f(\bar{x}) \rangle$ et $H(p_2) = \text{Max}_{x \in D} \langle p_2, f(x) \rangle \geq \langle p_2, f(\bar{x}) \rangle$.

Alors, on trouve :

$$\begin{aligned} \theta H(p_1) + (1-\theta)H(p_2) &\geq \theta \langle p_1, f(\bar{x}) \rangle + (1-\theta) \langle p_2, f(\bar{x}) \rangle \\ &= \langle \theta p_1, f(\bar{x}) \rangle + \langle (1-\theta)p_2, f(\bar{x}) \rangle \\ &= \langle \theta p_1 + (1-\theta)p_2, f(\bar{x}) \rangle \\ &= H(\theta p_1 + (1-\theta)p_2). \end{aligned}$$

2. La fonction $H(p)$ est linéaire par morceaux :

La fonction $H(p)$ est linéaire par morceaux puisque le problème $\text{Max}_{x \in D} \langle p, f(x) \rangle$ possède un nombre fini de bases et que pour chacune de ces bases, la valeur de $\langle p, f(x) \rangle$ varie linéairement en fonction de p .

3. La fonction $H(p)$ est donc non-différentiable aux points de jonctions de ses morceaux linéaires.

Afin de résoudre le minimax dynamique stochastique, on peut envisager l'utilisation des outils usuels de l'optimisation convexe non-différentiable. Parmi eux, la méthode des plans sécants est celle que l'on a sélectionnée. Cette dernière consiste à approcher par une famille d'hyperplans tangents l'épigraphe de la

fonction $H(p)$. Plus particulièrement, cette technique suppose qu'en tout point $\bar{p} \in \wp$ on sache calculer un sous-gradient γ faisant partie du sous-différentiel $\partial H(\bar{p})$. Si en un point quelconque la fonction est différentiable, alors le sous-différentiel se résume à un seul point : le gradient de la fonction $H(p)$ par rapport à p (qui décrit alors parfaitement la fonction localement puisqu'elle est linéaire par morceaux).

Par définition, un sous-gradient γ de la fonction convexe $H(p)$ au point \bar{p} est tel que $H(p) \geq H(\bar{p}) + \langle (p - \bar{p}), \gamma^T \rangle$. Pour tout point de non-différentiabilité \bar{p} , un sous-gradient possible est $f(x_{\bar{p}}^*)$ où $x_{\bar{p}}^* \in \arg \text{Max}_{x \in D} \langle \bar{p}, f(x) \rangle$. En effet, on remarque dans ce cas que :

$$\begin{aligned} H(\bar{p}) + \langle (p - \bar{p}), f(x_{\bar{p}}^*) \rangle &= \langle \bar{p}, f(x_{\bar{p}}^*) \rangle + \langle (p - \bar{p}), f(x_{\bar{p}}^*) \rangle \\ &= \langle \bar{p}, f(x_{\bar{p}}^*) \rangle + \langle p, f(x_{\bar{p}}^*) \rangle - \langle \bar{p}, f(x_{\bar{p}}^*) \rangle \\ &= \langle p, f(x_{\bar{p}}^*) \rangle \\ &\leq \text{Max}_{x \in D} \langle p, f(x) \rangle \\ &= H(p). \end{aligned}$$

On dénote par $\hat{H}(p)$ la fonction qui approche graduellement $H(p)$. L'algorithme des plans sécants s'écrit :

Algorithme des plans sécants

Étape 0 : Choisir $p^{(0)} \in \wp$ et laisser $k = 0$.

Étape 1 : Trouver $x_{p^{(k)}}^* \in \arg \text{Max}_{x \in D} \langle p^{(k)}, f(x) \rangle$.

Étape 2 : Trouver $p^{(k+1)} \in \arg \text{Min}_{p, \theta} \theta$ s.c. $p \in \wp$,

$$\begin{aligned} \langle p, f(x_{p^{(0)}}^*) \rangle - \theta &\leq 0, \\ \langle p, f(x_{p^{(1)}}^*) \rangle - \theta &\leq 0, \\ &\vdots \\ \langle p, f(x_{p^{(k-1)}}^*) \rangle - \theta &\leq 0 \text{ et} \\ \langle p, f(x_{p^{(k)}}^*) \rangle - \theta &\leq 0. \end{aligned}$$

Étape 3 : Si $f(x_{p^{(k)}}^*) - f(x_{p^{(k-1)}}^*) = 0$ alors c'est terminé.

Autrement, $k = k + 1$ et retourner à l'étape 1.

À l'itération k , on résout à l'étape 1 le problème d'optimisation dynamique stochastique standard $H(p^{(k)})$ où $p^{(k)}$ est le vecteur de probabilité trouvé à l'itération précédente. À l'étape 2, on ajoute d'abord un hyperplan sécant à la fonction $H(p)$ au point $p^{(k)}$ améliorant ainsi la description $\hat{H}(p)$ et on trouve ensuite un nouveau vecteur de probabilité $p^{(k+1)} \in \mathcal{P}$ qui minimise la fonction $\hat{H}(p)$, c'est-à-dire qui minimise la fonction décrite par l'ensemble des hyperplans que l'on ajoute graduellement. Finalement, à l'étape 3, on vérifie le critère d'arrêt. S'il n'est pas satisfait, on incrémente k et on retourne à l'étape 1.

Le critère d'arrêt choisi indique que si deux itérations successives génèrent le même sous-gradient alors il n'y a plus d'amélioration au niveau de la recherche du vecteur de probabilité. En effet, si cet algorithme génère un nouvel hyperplan alors c'est qu'il a trouvé une meilleure solution $p^{(k+1)}$ au problème $\text{Min}_{p \in \mathcal{P}} \hat{H}(p)$.

Dans ce cas, la convergence de l'algorithme des plans sécants est finie puisque la fonction $H(p)$ est linéaire par morceaux. En effet, il est certain que cette méthode converge en un nombre limité d'itérations à cause du nombre fini de sommets du polyèdre D .

Lorsque l'on utilise un algorithme où des contraintes s'ajoutent progressivement, comme dans l'étape 2 de l'algorithme des plans sécants, on peut envisager d'utiliser l'algorithme simplexe-dual ce qui est équivalent à la technique de génération de colonnes. En effet, l'ajout de contraintes dans le problème primal correspond à l'ajout de colonnes dans le problème dual. À une itération k donnée, ce problème dual dont la solution optimale est le vecteur variables (v^*, λ^*) est :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min}_{p, \theta} \theta \text{ s.c. } p \in \mathcal{P} \\ \langle p, f(x_{p^{(0)}}^*) \rangle - \theta \leq 0 \\ \vdots \\ \langle p, f(x_{p^{(k)}}^*) \rangle - \theta \leq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{u, \lambda} b^T \cdot v \text{ s.c. } A_{\text{Card}(S) \times m}^T \cdot v + \sum_{i=0}^k f(x_{p^{(i)}}^*) \cdot \lambda_i \leq 0 \\ - \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \leq 0 \ (i = 0, \dots, k) \\ v_j \text{ soit } \leq \text{ ou } \geq \text{ ou libre } \ (j = 1, \dots, m) \end{array} \right.$$

Problème Primal **Problème Dual**

- où • la matrice $A_{m \times \text{Card}(S)}$ définit l'ensemble des contraintes linéaires en p modélisant \wp ,
- le vecteur b représente le membre de droite correspondant à celui qui modélise \wp et
 - le sens de la variable v_j est déterminé par le sens de la contraintes correspondantes dans le problème primal.

La proposition suivante montre que $\left(p^K, \sum_{i=0}^K -\lambda_i^* \cdot x_{p^{(i)}}^* \right)$ est un point de selle (c'est-à-dire qui satisfait la condition (3.1.3.b)) et par conséquent une solution du minimax dynamique stochastique.

Proposition 2 :

Lorsque l'algorithme des plans sécants s'arrête à l'itération K , une solution du minimax dynamique stochastique est $\left(p^K, \sum_{i=0}^K -\lambda_i^ \cdot x_{p^{(i)}}^* \right)$ où λ_i^* est la variable duale optimale associée à la i -ème coupe.*

Démonstration :

$$1. \quad p^K \text{ satisfait } \left\langle p^K, f\left(\sum_{i=0}^K -\lambda_i^* \cdot x_{p^{(i)}}^*\right) \right\rangle = \text{Max}_{x \in D} \langle p^K, f(x) \rangle :$$

Lorsque l'algorithme des plans sécants s'arrête, cette condition est satisfaite implicitement à l'étape 2.

$$2. \quad \sum_{i=0}^K -\lambda_i^* \cdot x_{p^{(i)}}^* \text{ satisfait } \left\langle p^K, f\left(\sum_{i=0}^K -\lambda_i^* \cdot x_{p^{(i)}}^*\right) \right\rangle = \text{Min}_{p \in \wp} \left\langle p, f\left(\sum_{i=0}^K -\lambda_i^* \cdot x_{p^{(i)}}^*\right) \right\rangle :$$

Dans un contexte de dualité Lagrangienne, lorsque l'algorithme des plans sécants s'arrête, si on dualise les K contraintes correspondant aux hyperplans qui décrivent $H(p)$ alors le Lagrangien du problème primal de l'étape 2 s'écrit :

$$L(p, \lambda) = \theta - \sum_{i=0}^K \lambda_i \cdot \left\langle p, f(x_{p^{(i)}}^*) \right\rangle - \theta$$

où • $\lambda \leq 0$ est un vecteur de multiplicateur de Lagrange.

Puisque le problème primal est linéaire en p alors il existe un point de selle (p^*, λ^*) résolvant ce Lagrangien (Minoux [19]) qui satisfait la condition suivante :

$$L(p^*, \lambda^*) = \text{Min}_{p \in \wp} \left\{ \theta - \sum_{i=0}^K \lambda_i^* \cdot \left\langle p, f(x_{p^{(i)}}^*) \right\rangle - \theta \right\}.$$

Cependant, l'équivalence suivante est vraie pour tout p :

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=0}^K \lambda_i^* \cdot \left(\langle p, f(x_{p^{(i)}}^*) \rangle - \theta \right) &= -\sum_{i=0}^K \lambda_i^* \cdot \langle p, f(x_{p^{(i)}}^*) \rangle - \sum_{i=0}^K \lambda_i^* \cdot (-\theta) \\
&= \left(\left\langle p, \sum_{i=0}^K -\lambda_i^* \cdot f(x_{p^{(i)}}^*) \right\rangle \right) - \theta \\
&= \left\langle p, f \left(\sum_{i=0}^K -\lambda_i^* \cdot x_{p^{(i)}}^* \right) \right\rangle - \theta \quad \text{car } f \text{ est linéaire}
\end{aligned}$$

ce qui permet de dire que $\left\langle p^K, f \left(\sum_{i=0}^K -v_i^* \cdot x_{p^{(i)}}^* \right) \right\rangle = \text{Min}_{p \in \wp} \left\langle p, f \left(\sum_{i=0}^K -v_i^* \cdot x_{p^{(i)}}^* \right) \right\rangle$.

3.2.2 Complexité de l'algorithme

Soit n_1 et m_1 le nombre de variables et contraintes de D , alors le nombre d'itérations à effectuer pour décrire la fonction $H(p)$ correspond au nombre de points extrêmes sur le polyèdre D qui est tout au plus $\alpha_1 = C_{m_1}^{n_1}$. Cependant, à chaque itération k on doit trouver dans un premier temps le maximum de la fonction $\langle p^{(k)}, f(x) \rangle$ par rapport à x ce qui requiert tout au plus $\alpha_1 = C_{m_1}^{n_1}$ itérations et dans un second temps, il faut obtenir le minimum de la fonction $\hat{H}(p)$ qui exige un maximum de $\alpha_2^k = C_{m_2}^{n_2+k}$ itérations lorsque n_2 et m_2 sont respectivement le nombre de variables et contraintes de ∂ . Au total, l'algorithme des plans sécants effectue au plus $(\alpha_1)^2 + \sum_{i=0}^{\alpha_1} \alpha_2^i$ itérations du simplexe.

Par ailleurs, il est possible de choisir une autre approche équivalente qui consiste à décrire graduellement par des hyperplans la fonction $G(x) = \text{Min}_{p \in \wp} \langle p, f(x) \rangle$ afin de construire la fonction $\hat{G}(x)$ et à ensuite trouver $\text{Max}_{x \in D} \hat{G}(x)$. Dans ce cas,

l'algorithme exécute un nombre maximal de $(\alpha_2)^2 + \sum_{i=0}^{\alpha_1} \alpha_1^i$ itérations du simplexe

où $\alpha_1^k = C_{m_1}^{n_1+k}$. En fonction des nombres n_1 , n_2 , m_1 et m_2 , on choisit l'approche ayant le nombre d'itérations maximal le plus petit.

3.2.3 Un exemple numérique simple

Soit le problème d'optimisation :

$$\text{Min}_{p_1, p_2 \in \wp} \text{Max}_{x, y \in D} \{p_1(x + 5y) + p_2(4x + 2y)\}$$

où • $D \equiv \{(x, y) \mid x + y = 1000; x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ et
 • $\wp \equiv \{(p_1, p_2) \mid p_1 + p_2 = 1; p_1 \geq 0 \text{ et } p_2 \geq 0\}$

qui consiste à trouver la répartition optimale d'un investissement dans deux véhicules de placements pour la pire distribution de probabilité (p_1, p_2) si le budget initial est de 1000\$. L'application de l'algorithme des plans sécants est :

Étape 0 : Le vecteur initial $p^{(0)} = (p_1, p_2) = (0.5, 0.5)$ est choisi et $k = 0$.

Étape 1 : $x_{p^{(0)}}^* = \arg\left(\text{Max}_{x, y \in D}(2.5x + 3.5y)\right) \Rightarrow x_{p^{(0)}}^* = (x^*, y^*) = (1000, 0)$.

Étape 2 : $\text{Min}_{p_1, p_2} \theta$ s.c. $(p_1, p_2) \in \wp$
 $1000p_1 + 4000p_2 - \theta \leq 0$
 $\Rightarrow p^{(1)} = (p_1^*, p_2^*) = (0, 1)$.

Étape 3 : Clairement, le critère d'arrêt n'est pas satisfait. Alors $k = 1$ et on retourne à l'étape 1.

Étape 1 : $x_{p^{(1)}}^* = \arg\left(\text{Max}_{x, y \in D}(4x + 2y)\right) \Rightarrow x_{p^{(1)}}^* = (x^*, y^*) = (0, 1000)$.

Étape 2 : $\text{Min}_{p_1, p_2} \theta$ s.c. $(p_1, p_2) \in \wp$
 $1000p_1 + 4000p_2 - \theta \leq 0$
 $5000p_1 + 2000p_2 - \theta \leq 0$
 $\Rightarrow p^{(2)} = (p_1^*, p_2^*) = (0.\bar{3}, 0.\bar{6})$.

Étape 3 : Clairement, le critère d'arrêt n'est pas satisfait. Alors $k = 2$ et on retourne à l'étape 1.

Étape 1 : $x_{p^{(2)}}^* = \arg\left(\text{Min}_{x, y \in D}(3x + 3y)\right) \Rightarrow x_{p^{(2)}}^* = (x^*, y^*) = (0, 1000)$ est choisi mais on remarque qu'il y a une infinité de solutions optimales à ce problème.

Étape 2 : La même chose que l'étape 2 précédente.

Étape 3 : Le critère d'arrêt est satisfait alors on arrête. Les variables duales optimales sont $(v_1^*, v_2^*) = (-0.5, -0.5)$ et alors :

$$x^* = \sum_{i=0}^1 -v_i^* \cdot x_{p^{(i)}}^* = 0.5 \cdot (1000, 0) + 0.5 \cdot (0, 1000) = (500, 500).$$

Alors $(p^*, x^*) = ((0.\bar{3}, 0.\bar{6}), (500, 500))$ satisfait les conditions d'un point de selle.

Graphiquement, on observe que l'algorithme génère les deux hyperplans qui sont tangents à la fonction $H(p) = H(p_1, p_2) = \text{Max}_{x,y \in D} \{p_1(x + 5y) + p_2(4x + 2y)\}$:

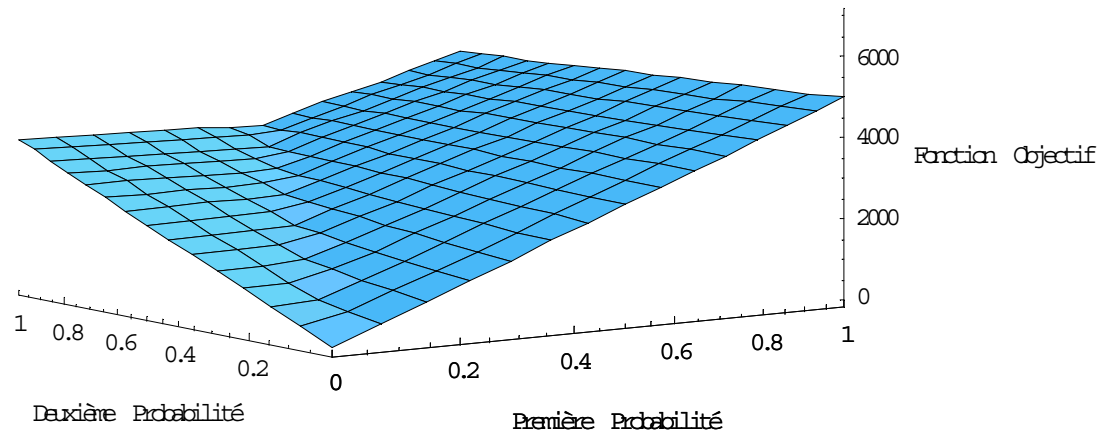


Figure 10. Graphe de la fonction $H(p)$.

Ici, le domaine polyédral \wp est tel que la somme des probabilités doit être 1 et alors on est intéressé aux points de $H(p)$ dont le domaine est la ligne $p_1 + p_2 = 1$. En ce qui concerne le problème de la répartition optimale, l'ensemble des probabilités de $H(p)$ lorsque $p \in \wp$ qui se trouve sur le premier hyperplan (celui le plus à gauche) détermine la solution optimale $x^* = (0, 1000)$ tandis que l'autre portion de $H(p)$ quand $p \in \wp$ qui se trouve sur le second hyperplan (celui le plus à droite) identifie la solution optimale $x^* = (1000, 0)$. Le point minimisant la fonction $H(p)$ est celui qui se trouve exactement à l'emplacement de la cassure et correspond à $(0.\bar{3}, 0.\bar{6})$.

4. Modèle de gestion de l'actif et du passif

Dans ce chapitre, on présente le modèle linéaire de gestion de l'actif et du passif ayant des étapes discrètes de décisions qui est utilisé dans le cadre de l'application du minimax dynamique stochastique et dont la formulation s'apparente à celle de Russel-Yasuda Kasai (voir section 2.3.4)¹. L'intérêt de cette modélisation découle de la définition de la fonction objectif qui est composée de deux parties principales: la première est l'espérance de la valeur finale du portefeuille d'actifs et la seconde représente des fonctions de pénalités asymétriques, linéaires par morceaux et convexes (c'est-à-dire que ces pénalités sont d'autant plus élevées que les violations aux contraintes d'appariement et de rendement cible sont grandes).

Il convient de noter que l'utilisation de contraintes « dures » d'appariement de l'actif et du passif dans un tel modèle peut occasionner un manque à gagner au niveau du gain du portefeuille d'actif, en ne permettant aucune déviation, ce qui oblige à une gestion extrêmement prudente. Incidemment, la première fonction de pénalité consiste à éviter les coûts de réorganisation engendrés par des problèmes d'appariement de l'actif et du passif. En ce qui concerne la seconde fonction de pénalité, elle tente d'amoinrir les déviations inférieures du rendement du portefeuille d'actifs par rapport à une cible préalablement définie. C'est cette deuxième pénalité qui traite l'attitude face au risque des gestionnaires du portefeuille.

L'ensemble des détails relatifs au modèle concernant les hypothèses, les paramètres, les données et la modélisation du passif actuariel se trouve dans les mémoires de Veilleux (1998) et Aithnard (1997). En omettant les contraintes de non-anticipativité (à la résolution, ces contraintes sont traitées implicitement par nomination de variables, c'est-à-dire que les variables qui doivent être égales portent le même nom) et de non-négativité, le modèle général s'écrit :

¹ Il est toutefois important de constater que l'approche du minimax dynamique stochastique peut aussi être appliquée à tout autre problème de gestion de portefeuille.

$$\text{Max} \left\{ \sum_{s \in S} \left[p_s r_s - \sum_{t=0}^3 p_{s_t} (D_{1_t} w_{1,s_t} + D_{2_t} w_{2,s_t} + E_{1_t} v_{1,s_t} + E_{2_t} v_{2,s_t}) \right] \right\} \quad (3.1.a)$$

$$\text{s.c.} \quad x_{i,s_t=0} = XIN_i - (1 + F_i)z_{i,s_t=0} + (1 - F_i)y_{i,s_t=0}, \quad i = 1,2,3,4,5 \quad (3.1.b)$$

$$x_{i,s_t=1} = M_{i,s_t=1} x_{i,s_t=0} - (1 + F_i)z_{i,s_t=1} + (1 - F_i)y_{i,s_t=1}, \quad i = 1,2,3,4,5 \quad (3.1.c)$$

$$x_{i,s_t=2} = M_{i,s_t=2} x_{i,s_t=1} - (1 + F_i)z_{i,s_t=2} + (1 - F_i)y_{i,s_t=2}, \quad i = 1,2,3,4,5 \quad (3.1.d)$$

$$x_{i,s_t=3} = M_{i,s_t=3} x_{i,s_t=2}, \quad i = 1,2,3,4,5 \quad (3.1.e)$$

$$\left(\sum_{i=1}^5 x_{i,s_t=0} \right) - \text{INITIAL} = 0, \quad (3.1.f)$$

$$\left(\sum_{i=1}^5 y_{i,s_t} - z_{i,s_t} \right) = C_{s_t} - Q_{s_t}, \quad t = 0,1,2 \quad (3.1.g)$$

$$\left(\sum_{i=1}^5 x_{i,s_t} \right) + w_{1,s_t} + w_{2,s_t} \geq L_{s_t}, \quad t = 0,1,2,3 \quad (3.1.h)$$

$$\left(\sum_{i=1}^5 x_{i,s_t} \right) + v_{1,s_t} + v_{2,s_t} \geq \text{INITIAL}(1.06)^t, \quad t = 0,1,2,3 \quad (3.1.i)$$

$$\left(\sum_{i=1}^5 x_{i,s_t=3} \right) - r_s = 0 \quad (3.1.j)$$

- où
- p_{s_t} est la probabilité de réalisation du nœud à la date t pour le scénario s ,
 - r_s est la valeur (M\$) de la richesse finale pour le scénario s ,
 - v_{1,s_t} est la déviation (M\$) inférieure du rendement obtenu, d'un montant inférieur à 2M\$, à la date t pour le scénario s ,
 - v_{2,s_t} est la déviation (M\$) inférieure du rendement obtenu, d'un montant supérieur à 2M\$, à la date t pour le scénario s ,
 - w_{1,s_t} est la portion (M\$) du déficit actuariel inférieure à 1.5M\$ à la date t pour le scénario s ,
 - w_{2,s_t} est la portion (M\$) du déficit actuariel supérieure à 2M\$ à la date t pour le scénario s ,
 - x_{i,s_t} est la valeur (M\$) totale de l'actif i à la date t pour le scénario s ,
 - y_{i,s_t} est la valeur (M\$) de l'achat de l'actif i à la date t pour le scénario s ,
 - z_{i,s_t} est la valeur (M\$) de la vente de l'actif i à la date t pour le scénario s ,
 - C_{s_t} est le montant (M\$) total des cotisations perçues à la date t pour le scénario s ,
 - D_{1_t} est la pondération de la fonction de pénalité du risque de déficit actuariel à la date t , pour les déficits inférieurs à 1.5M\$,
 - D_{2_t} est la pondération de la fonction de pénalité du risque de déficit actuariel à la date t , pour les déficits supérieurs à 1.5M\$,
 - E_{1_t} est la pondération de la fonction de pénalité du risque de rendement cible à la date t , pour les déficits inférieurs à 2M\$,

- E_{2_t} est la pondération de la fonction de pénalité du risque de rendement cible à la date t , pour les déficits supérieurs à 2M\$,
- F_i est le frais de transaction et de gestion en pourcentage pour l'actif i ,
- $INITIAL$ est la valeur initiale du portefeuille d'actifs avant rebalancement,
- L_{s_t} est la valeur (M\$) du passif actuariel total à la date t pour le scénario s ,
- M_{i,s_t} est le changement relatif du prix de l'actif i pendant la période précédant la date t pour le scénario s ,
- Q_{s_t} est le montant (M\$) total des prestations payées à la date t pour le scénario s ,
- S est l'ensemble des scénarios dont $Card(S) = 64$ et
- XIN_i est la valeur (M\$) initiale de l'actif i avant le rebalancement.

Dans cette modélisation, (3.1.a) correspond à la maximisation de l'espérance de la richesse finale diminuée des coûts relatifs au déficit actuariel et à des déviations inférieures au niveau du rendement cible du portefeuille. Les contraintes (3.1.b), (3.1.c), (3.1.d) et (3.1.e) déterminent la valeur de chaque actif après rebalancement. (3.1.f) indique que la richesse initiale avant rebalancement est la somme des actifs initiaux avant rebalancement. (3.1.g) impose au modèle d'investir la différence des cotisations sur les prestations lorsqu'elle est positive et de vendre des actifs pour payer le montant de cette différence lorsque les prestations sont supérieures aux cotisations. (3.1.h) et (3.1.i) déterminent respectivement la valeur du déficit actuariel et de la déviation inférieure du rendement obtenu par rapport au rendement cible. Finalement, la contrainte (3.1.j) permet de calculer la richesse finale.

La construction de l'arbre des scénarios est telle qu'à chaque nœud, le marché a quatre réalisations de bases possibles : l'optimiste (probabilité = 30%), la moyenne (probabilité = 45%), la pessimiste (probabilité = 15%) et celle de correction (probabilité = 10%). Graphiquement, on observe que l'arbre à la forme suivante :

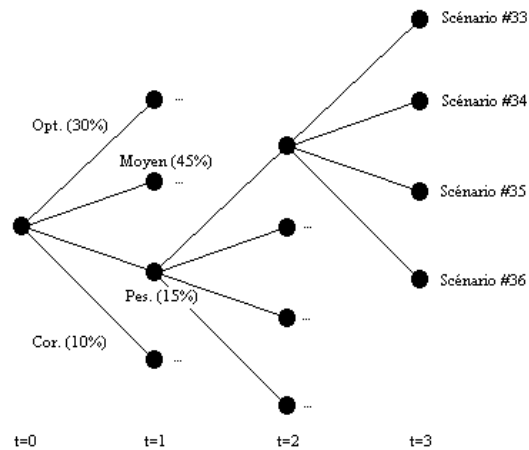


Figure 11. Arbre des scénarios du problème d'appariement de l'actif et du passif.

Par exemple, le scénario 36 dans cet arbre correspond à la réalisation respective pessimiste-optimiste-correction au cours des trois périodes. On obtient la probabilité de réalisation de ce scénario en multipliant les probabilités associées à chacune des réalisations de base et alors pour le scénario 36, on a $P_{(s=36)_{t=3}} = 0.0045$.

Si le problème d'appariement de l'actif et du passif s'avère sensible aux probabilités, alors il est risqué pour le gestionnaire de fonder sa stratégie d'investissement uniquement sur la solution du modèle d'optimisation en contexte d'information parfaite sur les probabilités des états futurs. En effet, une telle situation implique qu'une simple erreur dans l'estimation de ces probabilités peut changer entièrement l'allure de la politique de décision. La solution du minimax dynamique stochastique permet au décideur de poser des relations ordinales sur les probabilités des scénarios ce qui est moins contraignant que l'imposition d'un poids à chacun de ces scénarios. De plus, cette même solution assure le gestionnaire d'un gain maximal du portefeuille d'actifs pour la pire distribution de probabilités de la classe \emptyset .

5. Analyse des résultats

Dans ce chapitre, on effectue d'abord une analyse de sensibilité du problème d'appariement de l'actif et du passif par rapport aux probabilités. Ensuite, on présente les résultats numériques obtenus par l'algorithme des plans sécants appliqué au minimax dynamique stochastique.

5.1 Analyse de sensibilité

En programmation linéaire, les logiciels fournissent automatiquement l'analyse de la sensibilité de la solution optimale à un changement d'un seul coefficient de la fonction objectif, toutes choses étant égales par ailleurs. Cependant, dans le contexte du problème d'appariement de l'actif et du passif, ces analyses automatiques ne sont pas valides pour vérifier si le problème est sensible par rapport aux probabilités puisqu'un changement d'une probabilité occasionne la modification de plusieurs coefficients de la fonction objectif. Afin d'analyser la sensibilité aux probabilités, on modifie légèrement les probabilités des quatre réalisations de bases du marché et on observe l'effet de cette modification. Si aucune modification n'est recensée alors on modifie encore un peu les probabilités des quatre réalisations de bases et on répète ce processus jusqu'à ce qu'il y ait un changement de la politique de décision optimale.²

Par ailleurs, le problème d'appariement de l'actif et du passif possède en réalité un horizon de planification fuyant, c'est-à-dire que l'on effectue des prévisions économiques à chaque période et que l'on ré-optimise le modèle avec ces nouvelles prévisions. On détermine donc l'intervalle de probabilités sur lequel la politique d'investissement de la première période est toujours la même puisque c'est uniquement cette décision que l'on considère dans le cadre d'un problème avec un horizon fuyant.

² Il doit certainement exister des processus plus intelligents pour effectuer cette analyse de sensibilité mais ceci ne correspond pas au centre d'intérêt de cette recherche.

Dans ce qui suit, on effectue deux mises en situation au sujet de l'attitude du gestionnaire par rapport à l'évaluation des probabilités des quatre réalisations de bases du marché :

1. Il s'agit d'un cas où la probabilité de la réalisation de base optimiste est modifiée et la valeur du changement est répartie uniformément sur les probabilités des autres réalisations de bases :

$$\begin{aligned} \text{Probabilité réalisation optimiste} &= 0.3000 + \theta \\ \text{Probabilité réalisation moyenne} &= 0.4500 - 0.3\bar{\theta} \\ \text{Probabilité réalisation pessimiste} &= 0.1500 - 0.3\bar{\theta} \\ \text{Probabilité réalisation de correction} &= 0.1000 - 0.3\bar{\theta} . \end{aligned}$$

L'intervalle de θ sur lequel la stratégie d'investissement de la première période ne varie pas est $\theta \in [-0.0171, 0.0156]$.

2. On considère le cas où les probabilités des réalisations de base optimiste et de correction sont modifiées et la valeur du totale du changement est répartie uniformément sur les probabilités des réalisations de base moyenne et pessimiste :

$$\begin{aligned} \text{Probabilité réalisation optimiste} &= 0.3000 + \theta \\ \text{Probabilité réalisation moyenne} &= 0.4500 - \theta \\ \text{Probabilité réalisation pessimiste} &= 0.1500 - \theta \\ \text{Probabilité réalisation de correction} &= 0.1000 + \theta \end{aligned}$$

L'intervalle de θ sur lequel la stratégie d'investissement de la première période ne varie pas est $\theta \in [-0.0158, 0.0179]$.

À la lumière de ces résultats, on remarque que les intervalles de θ sont très petits pour les deux mises en situations. Incidemment, on constate que le problème est très sensible au niveau des probabilités.

5.2 Résultats numériques

Dans cette section, on présente sous forme de tableau synthèse les variables de décision de la première période lorsque l'on applique l'algorithme du minimax dynamique stochastique avec quatre polyèdres \wp possibles. Ces derniers sont décrits par les contraintes suivantes :

$$\text{Cas 1 } (\wp_1): 0 \leq p_{s_{t=3}} \leq 1, \quad \forall s \in \{1, 2, 3, \dots, 64\} \text{ et } \sum_{s=1}^{\text{Card}(S)=64} p_{s_{t=3}} = 1.$$

$$\text{Cas 2 } (\wp_2): \left. \begin{array}{l} P_{(s+2)_{t=3}} \leq p_{s_{t=3}} \leq P_{(s+1)_{t=3}} \\ p_{s_{t=3}} \leq 2P_{(s+2)_{t=3}} + P_{(s+3)_{t=3}} \leq P_{(s+1)_{t=3}} \end{array} \right\} \forall s \in \left\{ \begin{array}{l} 1, 5, 9, 13, \\ 17, 21, 25, 29, \\ 33, 37, 41, 45, \\ 49, 53, 57, 61 \end{array} \right\},$$

$$0.0001 \leq p_{s_{t=3}} \leq 0.1, \quad \forall s \in \{1, 2, 3, \dots, 64\} \text{ et } \sum_{s=1}^{\text{Card}(S)=64} p_{s_{t=3}} = 1.$$

$$\text{Cas 3 } (\wp_3): \left. \begin{array}{l} P_{(s+2)_{t=3}} \leq p_{s_{t=3}} \leq P_{(s+1)_{t=3}} \\ p_{s_{t=3}} \leq 2P_{(s+2)_{t=3}} + P_{(s+3)_{t=3}} \leq P_{(s+1)_{t=3}} \end{array} \right\} \forall s \in \left\{ \begin{array}{l} 1, 5, 9, 13, \\ 17, 21, 25, 29, \\ 33, 37, 41, 45, \\ 49, 53, 57, 61 \end{array} \right\},$$

$$P_{(s+48)_{t=3}} \leq P_{(s+32)_{t=3}} \leq p_{s_{t=3}} \leq P_{(s+16)_{t=3}}, \quad \forall s \in \{1, 2, \dots, 16\},$$

$$0.0001 \leq p_{s_{t=3}} \leq 0.1, \quad \forall s \in \{1, 2, 3, \dots, 64\} \text{ et } \sum_{s=1}^{\text{Card}(S)=64} p_{s_{t=3}} = 1.$$

Cas 4 (\wp_4):

$$\begin{aligned} p_{(s=1)_{t=3}} &= 0.0270 & p_{(s=2)_{t=3}} &= 0.0405 & p_{(s=3)_{t=3}} &= 0.0135 & p_{(s=4)_{t=3}} &= 0.0090 \\ p_{(s=5)_{t=3}} &= 0.0405 & p_{(s=6)_{t=3}} &= 0.0608 & p_{(s=7)_{t=3}} &= 0.0203 & p_{(s=8)_{t=3}} &= 0.0135 \\ p_{(s=9)_{t=3}} &= 0.0135 & p_{(s=10)_{t=3}} &= 0.0203 & p_{(s=11)_{t=3}} &= 0.0068 & p_{(s=12)_{t=3}} &= 0.0045 \\ p_{(s=13)_{t=3}} &= 0.0090 & p_{(s=14)_{t=3}} &= 0.0135 & p_{(s=15)_{t=3}} &= 0.0045 & p_{(s=16)_{t=3}} &= 0.0030 \\ p_{(s=17)_{t=3}} &= 0.0405 & p_{(s=18)_{t=3}} &= 0.0608 & p_{(s=19)_{t=3}} &= 0.0203 & p_{(s=20)_{t=3}} &= 0.0135 \\ p_{(s=21)_{t=3}} &= 0.0608 & p_{(s=22)_{t=3}} &= 0.0911 & p_{(s=23)_{t=3}} &= 0.0304 & p_{(s=24)_{t=3}} &= 0.0203 \\ p_{(s=25)_{t=3}} &= 0.0203 & p_{(s=26)_{t=3}} &= 0.0304 & p_{(s=27)_{t=3}} &= 0.0101 & p_{(s=28)_{t=3}} &= 0.0068 \\ p_{(s=29)_{t=3}} &= 0.0135 & p_{(s=30)_{t=3}} &= 0.0203 & p_{(s=31)_{t=3}} &= 0.0068 & p_{(s=32)_{t=3}} &= 0.0045 \\ p_{(s=33)_{t=3}} &= 0.0135 & p_{(s=34)_{t=3}} &= 0.0203 & p_{(s=35)_{t=3}} &= 0.0068 & p_{(s=36)_{t=3}} &= 0.0045 \\ p_{(s=37)_{t=3}} &= 0.0203 & p_{(s=38)_{t=3}} &= 0.0304 & p_{(s=39)_{t=3}} &= 0.0101 & p_{(s=40)_{t=3}} &= 0.0068 \\ p_{(s=41)_{t=3}} &= 0.0068 & p_{(s=42)_{t=3}} &= 0.0101 & p_{(s=43)_{t=3}} &= 0.0034 & p_{(s=44)_{t=3}} &= 0.0023 \\ p_{(s=45)_{t=3}} &= 0.0045 & p_{(s=46)_{t=3}} &= 0.0068 & p_{(s=47)_{t=3}} &= 0.0023 & p_{(s=48)_{t=3}} &= 0.0015 \\ p_{(s=49)_{t=3}} &= 0.0090 & p_{(s=50)_{t=3}} &= 0.0135 & p_{(s=51)_{t=3}} &= 0.0045 & p_{(s=52)_{t=3}} &= 0.0030 \\ p_{(s=53)_{t=3}} &= 0.0135 & p_{(s=54)_{t=3}} &= 0.0203 & p_{(s=55)_{t=3}} &= 0.0068 & p_{(s=56)_{t=3}} &= 0.0045 \\ p_{(s=57)_{t=3}} &= 0.0045 & p_{(s=58)_{t=3}} &= 0.0068 & p_{(s=59)_{t=3}} &= 0.0023 & p_{(s=60)_{t=3}} &= 0.0015 \\ p_{(s=61)_{t=3}} &= 0.0030 & p_{(s=62)_{t=3}} &= 0.0045 & p_{(s=63)_{t=3}} &= 0.0015 & p_{(s=64)_{t=3}} &= 0.0010 \end{aligned}$$

On remarque que le premier polyèdre correspond au cas d'un gestionnaire qui n'a aucune information disponible quant aux probabilités. Dans le deuxième et le troisième cas, quelques relations ordinales ont été posées tandis que dans la dernière situation, le gestionnaire pose un poids sur chaque scénario. Le quatrième cas correspond à la situation traitée dans Veilleux (1998). On observe finalement que l'on acquiert graduellement de l'information sur les probabilités puisque $\wp_4 \subset \wp_3 \subset \wp_2 \subset \wp_1$. On procède de cette façon car si on augmente considérablement le nombre de contraintes sur \wp alors on resserre de plus en plus le domaine autour d'une seule distribution de probabilité admissible qui correspondrait à la situation d'un modèle d'optimisation dynamique stochastique.

		Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
	$\langle p^*, f(x^*) \rangle$	13.5053M\$	13.6606M\$	13.8898M\$	14.9209M\$
Investissement dans les actifs à la date 0	Bons du Trésor à échéance 3 mois	5.1973M\$	5.6705M\$	4.6532M\$	0.0000M\$
	Obligations à Échéance 2 ans	2.2975M\$	2.2975M\$	2.2975M\$	2.2975M\$
	Obligations à Échéance 10 ans	0.0827M\$	0.0000M\$	0.0000M\$	0.0000M\$
	Indice boursier TSE 300	5.9078M\$	5.5101M\$	6.5302M\$	11.1536M\$
	Indice boursier EAEO	0.0000M\$	0.0000M\$	0.0000M\$	0.0000M\$

Tableau 1. Ce tableau montre les variables de décisions de la première période pour chacun des quatre cas.

6. Conclusion

Dans ce mémoire, on a mis en œuvre un algorithme de plan sécants qui permet de résoudre le minimax dynamique stochastique en contexte d'information imparfaite sur les probabilités des états futurs. La légitimité de cette approche découle du fait que plusieurs auteurs de la littérature financière en gestion de portefeuille posent l'hypothèse simplificatrice d'une connaissance parfaite de la distribution de probabilités des variables aléatoires du modèle. Une telle hypothèse est adéquate lorsque le problème est peu sensible à des changements au niveau des probabilités mais devient très compromettante lorsque ce n'est plus le cas. En ce qui concerne le problème de l'appariement de l'actif et du passif, on remarque qu'il est très sensible aux probabilités. La stratégie d'investissement obtenue par le minimax dynamique stochastique permet d'obtenir un gain espéré maximal, et ce pour la pire distribution de probabilité que la nature puisse occasionner. De plus, cette méthode évite au décideur de poser un poids sur chaque scénario.

De nombreuses avenues de recherche restent à explorer dans ce domaine riche aux niveaux théorique et pratique. Dans un premier lieu, des améliorations au niveau algorithmique peuvent être apportées afin d'accroître l'efficacité de la méthode de résolution. De plus, il serait envisageable d'introduire de l'information quant aux moments des distributions de probabilités des états futurs puisque la modélisation du polyèdre \wp le permet. De plus, il serait possible d'étudier le problème d'appariement de l'actif et du passif en considérant un maximax ce qui permettrait de donner l'intervalle dans lequel le profit espéré du portefeuille d'actifs s'établira. Toutefois, cette dernière direction de recherche nécessite l'introduction d'une méthode d'optimisation globale.

Bibliographie

- [1] BRETON, M. et EL HACHEM, S. «Algorithms for the Solution of Stochastic Dynamic Minimax Problems», *Computational Optimization and Applications*, vol. 4, 1995, p. 317-345.
- [2] BRETON, M. et EL HACHEM, S. «A Scenario Aggregation Algorithm for the Solution of Stochastic Dynamic Minimax Problems», *Stochastics and Stochastics Reports*, vol. 53, 1995, p. 305-322.
- [3] BRETON, M. et EL HACHEM, S. «Decomposition Algorithms for Stochastic Dynamic Programs», *Cahier du G.É.R.A.D.*, G-91-15, 1991, p. 1-34.
- [4] BRODT, A.I. «International Bank Asset and Liability Management», *Journal of Bank Research*, vol. 15, no. 2, été 1984, p. 82-94.
- [5] CARINO, D.R., KENT, T., MYERS, D.H., STACY, C., SYLVANUS, M., TURNER, A.L., WATANABE, K. et ZIEMBA, W.T. «The Russell-Yasuda Kasai Model: An Asset-Liability Model for a Japanese Insurance Company Using Multistage Stochastic Programming», *Interfaces*, vol. 24, no. 1, janvier – février 1994, p. 29-49.
- [6] CHEN, A.H. «Portfolio Selection with Stochastic Cash Demand», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 12, no. 2, juin 1977, p. 197-212.
- [7] DANTZIG, G.B. et INFANGER, G. «Multi-Stage Stochastic Linear Programs for Portfolio Optimization», *Annals of Operations Research*, vol. 45, 1993, p. 59-76.
- [8] DUPACOVA, J. «Minimax Approach to Stochastic Linear Programming and the Moment Problem», *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 58, 1978, p. 466-467.
- [9] GOLDEN, B.L. et KEATING, K.D. «Network Techniques for Solving Asset Diversification Problems in Finance», *Computers & Operations Research*, vol. 9, no. 3, 1982, p. 173-196.
- [10] GRESSIS, N., PHILIPPATOS, G.C. et HAYYA, J. «Multi-Period Portfolio Analysis and the Inefficiency of the Market Portfolio», *The Journal of Finance*, vol. 31, no. 4, septembre 1976, p. 1115-1126.
- [11] KING, A.J. «Asymmetric Risk Measures and Tracking Models for Portfolio Optimization under Uncertainty», *Annals of Operations Research*, vol. 45, 1993, p. 165-177.

- [12] KLAASSEN, P. «Discretized Reality and Spurious Profits in Stochastic Programming Models for Asset-Liability Management», *European Journal of Operational Research*, vol. 101, no. 2, septembre 1997, p. 374-392.
- [13] KLAASSEN, P. «Financial Asset-Pricing Theory and Stochastic Programming Models for Asset-Liability Management : A Synthesis», *Management Science*, vol. 44, no. 1, janvier 1998, p. 31-48.
- [14] KONNO, H., SHIRAKAWA, H. et YAMAZAKI, H. «A Mean-Absolute Deviation Skewness Portfolio Optimization Model», *Annals of Operations Research*, vol. 45, 1993, p. 205-220.
- [15] KORHONEN, A. «A Dynamic Bank Portfolio Planning Model with Multiples Scenarios, Multiple Goals and Changing Priorities», *European Journal of Operational Research*, vol. 30, no. 1, juin 1987, p. 13-24.
- [16] LEVY, H. et MARKOWITZ, H.M. «Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance», *The American Economic Review*, vol. 69, no. 3, 1979, p. 308-317.
- [17] MARKOWITZ, H.M. «Portfolio Selection», *The Journal of Finance*, vol. 7, no. 1, 1952, p. 77-91.
- [18] MARKOWITZ, H.M. «Portfolio Selection, Efficient Diversifications of Investments», 2^e édition : Basil Blackwell, 1991.
- [19] MINOUX, M. «Programmation mathématique, théorie et algorithmes», Dunod, 1983.
- [20] MULVEY, J.M. «An Asset-Liability Investment System», *Interfaces*, vol. 24, no. 3, mai-juin 1994, p. 22-33.
- [21] MULVEY, J.M. et VLADIMIROU, H. «Stochastic Network Programming for Financial Planning Problems», *Management Science*, vol. 38, no. 11, novembre 1992, p. 1642-1664.
- [22] ROCKAFELLAR, R.T. «Convex Analysis», *Princeton University Press*, 1970.
- [23] ROCKAFELLAR, R.T. et WETS, R.J.-B. «Scenarios and Policy Aggregation in Optimization under Uncertainty», *Mathematics of Operations Research*, vol. 16, 1991, p. 1-29.
- [24] STEVENS, G.V.G. «On Tobins Multiperiod Portfolio Theorem», *The Review of Economic Studies*, vol. 39, no. 120, octobre 1972, p. 461-468.
- [25] TOBIN, J. «Liquidity Preference as Behaviour Toward Risk», *Review of Economic Studies*, vol. 26, 1958, p. 65-86.

- [26] TOBIN, J. «The Theory of Portfolio Selection», *The Theory of Interest Rates*, 1965, p. 3-51.
- [27] ZIEMBA, W.T. et KUSY, M.I. «A Bank Asset-Liability Management Model», *Operations Research*, vol. 34, no. 3, 1986, p. 356-376.
- [28] ZACKOVA, J. «On Minimax Solutions of Stochastic Linear Programming Problems», *Casopis pro Pestovani Matematiky*, vol. 91, 1966, p. 423-430.