



HEC MONTRÉAL

**Performance de Tarification et de  
Couverture de Dérivés sur Taux  
d'Intérêt en Présence du *Smile***

**Par**

**Guillaume Ranger**

**Sciences de la gestion  
(Finance)**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de maîtrise ès sciences (M.Sc.)*

Janvier 2011

© Guillaume Ranger, 2011



# Résumé

Cette recherche évalue la performance de différents modèles à taux d'intérêt stochastique dans la tarification et la couverture de dérivés sur taux d'intérêt. Cette recherche se distingue par la rigueur méthodologique qu'elle utilise. En effet, on dérive une courbe d'obligation zéro-coupon en absence d'arbitrage selon les critères désirés par les grandes institutions financières et on extrait les volatilités caplet des cotations de caps en employant la méthode la plus complexe du terminal d'information financière Bloomberg. Ainsi, en se basant sur un échantillon de 252 semaines composé de 42 caps de 6 échéances et de 7 taux d'exercices, on constate que les modèles retenus éprouvent de sérieuses difficultés à tarifier les caps hors de la monnaie et spécifiquement ceux de court terme. Cependant, la performance de tarification permet d'illustrer l'importance de la modélisation du *smile* de volatilité dans le marché des caps. Aussi, on remarque que lorsqu'on emploie une multitude d'instruments de couverture les disparités entre les modèles à bien saisir le *smile* disparaissent. Par ailleurs, tous les modèles affichent une piètre performance dans la couverture des caps hors de la monnaie.

# Remerciements

Je tiens à remercier Simon Lalancette pour son soutien moral, la qualité de ses conseils et de son enseignement et plus spécialement le temps qu'il a consacré à lire et relire plusieurs parties de ce mémoire. Je remercie également Francine Blais et Claude Laurin qui ont fait une dérogation à certains règlements administratifs pour corriger ma nonchalance et donc de me permettre d'achever mon cheminement de maîtrise. Finalement, j'aimerais remercier mes parents, Sylvie et Réal, qui m'ont toujours donné un appui et un support inconditionnels dans mes projets les plus ambitieux.

# Table des matières

Résumé	i
Remerciements	ii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Revue de la littérature</b>	<b>4</b>
2.1 Évolution des modèles à taux d'intérêt stochastique . . . . .	4
2.2 Littérature empirique . . . . .	12
<b>3 Modélisation</b>	<b>17</b>
3.1 Le <i>smile</i> de volatilité . . . . .	17
3.1.1 Le problème du <i>smile</i> . . . . .	17
3.1.2 Justification du <i>smile</i> . . . . .	20
3.2 Modèle SABR . . . . .	22
3.2.1 Spécification du modèle SABR . . . . .	23
3.2.2 Tarification des caplets . . . . .	24
3.2.3 Mesures des risques . . . . .	27
3.2.4 Avantages et limitations du modèle SABR . . . . .	29
3.3 Modèles à volatilité locale . . . . .	30

---

3.3.1	Diffusion décalée (DD) . . . . .	32
3.3.2	Mélange de densités log-normales (LM) . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Calibration</b>	<b>38</b>
4.1	Courbe d'obligations zéro-coupon . . . . .	38
4.1.1	Algorithme itératif . . . . .	39
4.1.2	Ajustments de la courbe d'obligations zéro-coupon . . . .	45
4.1.3	Analyse et Résultats . . . . .	49
4.2	Structure à terme des volatilités . . . . .	54
4.2.1	Analyse et Résultats . . . . .	59
4.3	Calibration des modèles . . . . .	60
4.3.1	Fonction de minimisation . . . . .	60
4.3.2	Calibration du modèle SABR . . . . .	61
4.3.3	Calibration du modèle de marché LIBOR . . . . .	62
4.3.4	Calibration du modèle DD . . . . .	64
4.3.5	Calibration du modèle LM . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Analyse des résultats</b>	<b>66</b>
5.1	Les données . . . . .	66
5.2	Résultats empiriques . . . . .	70
5.2.1	Résultats de calibration . . . . .	70
5.2.2	Performance de tarification . . . . .	74
5.2.3	Performance de couverture . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>88</b>

# Table des figures

4.1	Structure à terme des taux LIBOR zéro-Coupon et taux forward 3 mois. . . . .	50
4.2	Analyse en composantes principales des taux LIBOR zéro-coupon. . . . .	52
4.3	Ajustement du biais de convexité des 8 premiers contrats Eurodollars. . . . .	53
4.4	Volatilités implicites moyennes des caplets . . . . .	59
5.1	Séries chronologiques des cotations caps pour la période du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008. . . . .	69
5.2	Séries Chronologiques des Erreurs Quadratiques Moyenne (RMSE) de Tarification pour la Période du 9 Janvier 2004 au 31 Octobre 2008. . . . .	73



# Liste des tableaux

4.1	Information Sommaires des Taux LIBOR Zéro-Coupon .	51
5.1	Statistiques Sommaires des Cotations de Caps . . . . .	68
5.2	Estimation des Paramètres . . . . .	71
5.3	Erreurs Quadratiques Moyenne (RMSE) . . . . .	74
5.4	Performance de Tarification Hors Échantillon . . . . .	75
5.5	Erreurs Quadratiques Moyennes de Tarification Exprimées en Pourcentage . . . . .	77
5.6	Erreurs Moyennes de Tarification Exprimées en Pourcentage . . . . .	79
5.7	Comparaison de la Performance de Tarification des Modèles . . . . .	81
5.8	Performance de Couverture des Modèles . . . . .	85
5.9	Régression sur les Facteurs Idiosyncratiques liés à la Volatilité dans le Marché des Caps. . . . .	86

# Chapitre 1

## Introduction

Le marché des dérivés sur taux d'intérêt est l'un des plus vastes et des plus liquides du milieu financier. Les plus récentes statistiques de la banque des règlements internationaux évaluent que l'encours des montants notionnels transigés avoisine les 49 trillions de dollars<sup>1</sup>. Dès lors, la tarification et l'élaboration des opérations d'arbitrage en couverture des dérivés sur taux d'intérêt constituent des tâches primordiales pouvant signifier des gains ou des pertes pécuniaires considérables pour les divers acteurs de ce marché. Afin d'établir une méthodologie de tarification et de couverture cohérente et rigoureuse, d'innombrables modèles furent proposés dans la littérature. Toutefois, la majorité de ces modèles n'inclurent pas, lors de leur conception, un rouage fondamental faisant maintenant partie inhérente du marché des dérivés sur taux d'intérêt.

Durant les dernières années, après avoir consécutivement influencé le marché des actions et le marché des changes, le *smile* de volatilité s'est manifesté sur le marché des dérivés sur taux d'intérêt. Le problème du *smile* de volatilité complexifie la tâche déjà laborieuse de tarifier et couvrir les risques des dérivés sur taux d'intérêt. En réponse à ce nouveau problème, une multitude de modèles ont été développés et sont encore aujourd'hui développés pour formellement résoudre le problème du *smile* de volatilité et ainsi intégrer l'in-

---

1. Plus précisément, 48,8 trillions de dollars américains selon le rapport trimestriel de septembre 2010 accessible sur le site de la banque des règlements internationaux au [www.bis.org](http://www.bis.org).

formation de toutes les cotations disponibles à un négociateur. Nonobstant la compréhension théorique du problème du *smile* apportée par cette pléthore de modèles, leur validité empirique reste encore à vérifier.

Dans cette optique, ce mémoire étudie empiriquement la performance de tarification et de couverture des dérivés sur taux d'intérêt de type cap de divers modèles à taux d'intérêt stochastiques alternatifs. Manifestement, la qualité d'un modèle à taux d'intérêt stochastique ne doit pas s'appuyer uniquement sur la performance de tarification des dérivés actuellement disponibles, mais doit aussi offrir une couverture adéquate et cohérente des risques de ces mêmes dérivés.

Cette recherche se basant fondamentalement sur le pragmatisme, la probabilité qu'un modèle puisse être utilisé en pratique influencera grandement le choix des modèles retenus dans cette étude. Plus précisément, le modèle SABR, développé par Hagan, Kumar, Lesniewski, et Woodward (2002), est devenu une référence sur le marché des dérivés sur taux d'intérêt pour la cotation des options européennes standards selon plusieurs auteurs dont Brigo et Mercurio (2006) et Rebonato et White (2009). De plus, selon plusieurs auteurs dont Hagan et al. (2002), Rebonato (2004) et Piterbarg (2005), le modèle SABR offre théoriquement une performance de couverture supérieure aux modèles à volatilité locale, qui sont par ailleurs des modèles excessivement populaires en pratique. Cette recherche se structurera donc à la comparaison empirique de tarification et de couverture du modèle SABR et de quelques modèles à volatilité locale. Les modèles choisis sont tous conceptuellement aisés à comprendre et à implanter, en raison de la disponibilité de formules ou d'approximations analytiques, ce qui les rend attrayants aux yeux d'un négociateur.

La contribution de cette recherche à la littérature existante sera double. D'une part, en s'appuyant sur la deuxième base de données la plus étoffée de la littérature existante, nous tenterons de justifier la validité empirique de modèles répandus en pratique et explicitement conçus pour tenir compte de l'effet du *smile* de volatilité, mais sans consensus empirique solide. Particulièrement, nous serons la première étude à rigoureusement éprouver et analyser

les qualités empiriques du modèle SABR dans le marché des dérivés sur taux d'intérêt. D'autre part, notre recherche contribuera à l'énigme de la présence de facteurs idiosyncratiques liés à la volatilité dans le marché des dérivés sur taux d'intérêt. En effet, si nos tests de couverture s'avèrent concluants, on pourrait exclure la nécessité de considérer de tels facteurs lors de l'élaboration d'une stratégie de tarification et de couverture cohérente. Par contre, une piètre performance de couverture des modèles viendrait appuyer les recherches de Collin-Dufresne et Goldstein (2002), Heidari et Wu (2003) et Li et Zhao (2006) qui tendent à confirmer la présence de facteurs idiosyncratiques liés à la volatilité qui influencent le prix des dérivés sur taux d'intérêt et qui affectent donc la performance de tarification et de couverture des caps.

Le reste de cette recherche s'articule comme suit. Le chapitre 2 présente l'évolution des divers paradigmes qui influencèrent le développement des modèles à taux d'intérêt stochastique et présente la littérature empirique afférente à la performance de tarification et la performance des opérations d'arbitrage de couverture des dérivés sur taux d'intérêt. Le chapitre 3 définit de façon formelle le problème du *smile* en plus d'exposer les solutions proposées par les différents modèles étudiés dans cette recherche. Le chapitre 4 explore chacune des étapes inhérentes au processus de calibration permettant ainsi l'utilisation empirique des modèles. Le chapitre 5 présente les différents résultats et propose une analyse détaillée et rigoureuse des résultats obtenus. Le chapitre 6 résume les points essentiels de cette recherche en plus de proposer quelques pistes à explorer dans les recherches futures.

# Chapitre 2

## Revue de la littérature

Dans ce chapitre, la vaste et riche littérature afférente aux dérivés sur taux d'intérêt sera développée selon deux volets distincts. D'une part, on caractérise l'évolution des modèles à taux d'intérêt stochastique au travers les différents paradigmes qui influencent leur conception. D'autre part, les recherches empiriques traitant de l'évaluation de la performance de tarification et d'arbitrage en couverture des dérivés sur taux d'intérêt de type caps et swaptions sont présentées et leurs principaux résultats énoncés succinctement.

### 2.1 Évolution des modèles à taux d'intérêt stochastique

Black et Scholes (1973) publièrent une formule novatrice permettant d'évaluer analytiquement le prix de dérivés d'actifs financiers. Leurs travaux, combinés aux recherches connexes de Merton (1973a,b), établirent un cadre d'analyse cohérent en absence d'arbitrage et poussèrent de l'avant un nouveau paradigme en matière de valorisation d'actifs financiers. En effet, la puissance de la formule de Black et Scholes (1973) suppose que même si deux investisseurs ne conviennent pas du rendement espéré d'un actif financier, ils devront tout de

même s'accorder sur le prix de ses dérivés. Dès lors, la formule devint promptement une référence sur les marchés financiers.

La notoriété croissante de la formule de Black et Scholes (1973) parvint au marché des dérivés sur taux d'intérêt par la généralisation de la formule par Black (1976). En postulant la log-normalité du taux LIBOR 3 mois ou du taux swap, la formule de Black (1976) fut adaptée à la tarification d'options de type caplet, flooret et swaption. La possibilité de tarifier ces options de façon analytique rend la formule de Black (1976) attrayante pour les négociateurs et motive son acceptation universelle sur le marché des dérivés sur taux d'intérêt. En outre, la formule est si bien ancrée que les cotations des options sur taux d'intérêt de type cap ou swaption sont aujourd'hui exprimées en terme de volatilité de Black (1976).

Afin d'illustrer la pertinence de la formule de Black (1976), supposons un cap, observé à  $t$ , d'un montant notionnel  $N$ , portant sur un taux d'exercice  $K$ , composé d'une séquence de dates d'échéance  $\mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}\}$  dont le taux LIBOR se fixe à  $T_{\alpha}, \dots, T_{\beta-1}$ , avec  $\tau = \{\tau_{\alpha}, \dots, \tau_{\beta}\}$  la différence entre les dates de fixation et d'échéance. Il est d'usage dans le marché de tarifier les caps selon :

$$Cap^{Black}(t, \mathcal{T}, \tau, K, N, \sigma_{\alpha, \beta}) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i Bl(F(t; T_{i-1}, T_i), K, v_i) \quad (2.1)$$

où

$$\begin{aligned} Bl(F(t; T_{i-1}, T_i), K, v_i) &= F(t; T_{i-1}, T_i) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \\ d_1(F(t; T_{i-1}, T_i), K, v_i) &= \frac{\ln \left( \frac{F(t; T_{i-1}, T_i)}{K} \right) + \frac{1}{2} v_i^2}{v_i} \\ d_2(F(t; T_{i-1}, T_i), K, v_i) &= d_1 - v_i \\ v_i &= \sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1} - t} \end{aligned}$$

avec  $\Phi$  représentant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et  $\sigma_{\alpha, \beta}$  le paramètre de volatilité qui est coté sur le marché.

Nonobstant son adoption généralisée, le modèle de Black (1976) arbore des lacunes qui rendent son utilisation inadéquate pour la tarification et la couverture de dérivés sur taux d'intérêt. D'une part, les taux d'intérêt ne suivent pas nécessairement une distribution log-normale et la surface de volatilité plate résultante de la log-normalité des taux ne corrobore pas les observations empiriques<sup>2</sup>. D'autre part, le modèle de Black (1976) ne permet pas de saisir l'évolution de la structure à terme des taux d'intérêt.

Or, une spécification appropriée de la dynamique future des taux d'intérêt est primordiale pour établir une tarification adéquate et des opérations d'arbitrage en couverture cohérentes. La spécification d'une dynamique stochastique peut sembler un problème futile, mais elle soulève plusieurs questions importantes : quelle variable modélise-t-on ? Comment modélise-t-on la partie stochastique ? Les réponses à ces questions influenceront manifestement la qualité et la facilité d'implantation, de calibration et la stabilité du modèle.

Une première approche, développée par Vasicek (1977) puis Cox, Ingersoll, et Ross (1985) dans le cas de modèles à un facteur et Longstaff et Schwartz (1992) dans le cas de modèles multifactoriels, propose de cerner l'évolution de la structure à terme des taux en modélisant le taux d'intérêt instantané  $r$ . Ces modèles d'équilibre général, aussi dit de classe affine, justifient ce choix en s'appuyant sur la relation existante entre les obligations zéro-coupon et le taux d'intérêt instantané définie telle que :

$$P(t, T) = E_t^Q \left[ e^{-\int_t^T r(s) ds} \right]. \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) signifie qu'en spécifiant la dynamique du taux d'intérêt instantané  $r$  et corollairement la distribution de probabilité de  $e^{-\int_t^T r(s) ds}$ , la courbe d'obligation zéro-coupon sera entièrement définie et permettra d'obtenir aisément une multitude de quantités fondamentales essentielles au marché des dérivés sur taux d'intérêt.

L'évolution du taux d'intérêt instantané est généralement caractérisée par

---

2. Jarrow et al. (2007), Rebonato (2002, 2004) sont quelques ouvrages démontrant empiriquement la présence du *smile* de volatilité sur le marché des dérivés sur taux d'intérêt.

une fonction de dérive  $\mu$  qui est composée d'un coefficient de retour à la moyenne déterministe et un coefficient de diffusion stochastique  $\sigma$  définie selon l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr(t) = \mu(t, r(t)) + \sigma(t, r(t))dW(t) \quad (2.3)$$

Cependant, cette approche n'est pas sans critique. En effet, la nature endogène des modèles implique une structure à terme des taux d'intérêt plutôt rigide et prédéfinie par le modèle. Cette caractéristique ne leur permet pas de saisir le large éventail de formes possibles que peut prendre la structure à terme concrètement. Ainsi, l'incapacité de répliquer le prix des obligations zéro-coupon observé empiriquement peut créer des opportunités d'arbitrage. Par conséquent, les applications empiriques de ces modèles ont été passablement limitées, mais leur contribution théorique a inspiré plusieurs modèles parus ultérieurement, dont la prochaine catégorie de modèles.

De façon à reproduire la structure à terme des taux observée, les modèles de taux court exogènes, aussi dits par absence d'opportunité d'arbitrage, sont développés. La différence avec les modèles endogènes de Vasicek (1977) et Cox et al. (1985) est l'inclusion de paramètres variant chronologiquement dans l'équation différentielle stochastique (2.3). Ainsi, Black, Derman, et Toy (1990), Hull et White (1990) et Black et Karasinski (1991), élaborent des modèles à un facteur pouvant être calibrés sur n'importe quel type de structure à terme. Bien que la structure à terme des taux soit parfaitement reproduite, ces modèles postulent plusieurs hypothèses irréalistes et non justifiables financièrement. Particulièrement, la corrélation parfaite entre les taux de différentes échéances supposée par les modèles à un facteur poussera le développement de modèles multifactoriels<sup>3</sup>. Les modèles par absence d'opportunité d'arbitrage ont été très populaires empiriquement et sont encore utilisés aujourd'hui pour certaines applications.

La première alternative aux modèles de taux court présentés jusqu'à présent

---

3. Par exemple, Hull et White (1994) transforme leur modèle à un facteur en un modèle à deux facteurs.



est proposée par Ho et Lee (1986) qui modélisent l'évolution de la structure à terme dans son ensemble, en absence d'arbitrage, par un modèle binomial. Contrairement au modèle de taux court à un ou à plusieurs facteurs, plutôt que d'utiliser un nombre prédéfini de variables d'états, Ho et Lee (1986) définissent la structure à terme comme variable. L'idée de Ho et Lee (1986) fut adaptée en temps continu par Heath, Jarrow, et Morton (1992) qui développèrent un cadre d'analyse par absence d'arbitrage très général<sup>4</sup> qui poussa de l'avant un nouveau paradigme en matière de valorisation d'actif financier. Précisément, en prenant le taux d'intérêt forward instantané comme variable fondamentale, Heath et al. (1992) ont développé une modélisation de l'évolution stochastique de la courbe des taux, où la dynamique des taux forwards est entièrement spécifiée par leur structure de volatilité instantanée. Ainsi, Heath et al. (1992) démontrent qu'en absence d'arbitrage l'évolution des taux forwards instantanée est déterminée, sous la mesure risque-neutre  $Q$ , selon l'équation différentielle stochastique :

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \left[ \int_t^T \sigma(t, s) ds \right] dt + \sigma(t, T) dW^Q(t) \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) implique que la propriété d'absence d'arbitrage des taux d'intérêt est entièrement définie par la volatilité. Contrairement aux modèles de taux court, où l'on était libre de spécifier la dérive et le coefficient de diffusion, les modèles HJM ne laissent pas cette liberté.

Les modèles de type HJM possèdent de nombreuses qualités qui ont favorisé leur acceptation parmi les négociateurs de dérivés sur taux d'intérêt et surtout les adeptes des dérivés plus exotiques. En effet, les modèles HJM permettent d'obtenir facilement la covariance entre les différents taux forward ce qui est très utile pour les produits exotiques. L'extension du modèle à plusieurs facteurs est particulièrement aisée. De plus, puisque la courbe de taux forwards constitue l'intrant au modèle, les prix des obligations zéro-coupon calculés avec le processus risque-neutre sont nécessairement égaux aux prix observés.

---

4. Il est d'ailleurs possible de dériver tous les modèles de taux court présentés jusqu'à maintenant sous le cadre HJM.

Par contre, le cadre d'analyse HJM n'est pas sans lacune. D'ailleurs, un des problèmes récurrents est la difficulté d'implantation numérique. En effet, il n'existe pas pour toutes les structures de volatilités spécifiées des solutions analytiques et rien n'assure que le processus sera markovien ou qu'il n'explosera pas a priori. Donc, il faut généralement se tourner vers des méthodes de Monte-Carlo ou d'arbre binomial à branche non recombinate, ce qui alourdi considérablement la calibration du modèle surtout si on pense utiliser un modèle HJM à plusieurs facteurs. Aussi, les taux forward instantanés ne sont pas des quantités observables sur les marchés financiers, ce qui n'est guère mieux que le taux d'intérêt instantané. Ces nombreux désavantages se résorberont lorsque le modèle sera adapté de sa forme continue à une forme discrète. Or, cette nouvelle catégorie de modèle en temps discret va engendrer un paradigme majeur sur le marché des dérivés sur taux d'intérêt en venant justifier théoriquement une vieille formule très connue du marché.

Les modèles de marché LIBOR et swap ont non seulement engendré un nouveau paradigme en matière de valorisation d'options sur taux d'intérêt, mais plus important encore, ils justifient de façon formelle l'utilisation de la formule de Black (1976). Ainsi, les modèles de marché deviennent la première catégorie de modèle présentée jusqu'à présent à utiliser la formule de Black (1976) pour la tarification des caps et des swaptions. Les travaux de Brace, Gatarek, et Musiela (1997) instituèrent un des types de modèle de marché les plus utilisés en pratique<sup>5</sup>. En effet, sous le cadre d'analyse HJM, Brace et al. (1997) proposèrent un processus stochastique suivi par les taux d'intérêt forward LIBOR et dérivèrent les restrictions nécessaires pour que ce processus soit log-normal sous la mesure risque-neutre pour une période de temps  $\tau$ . Ainsi, le caplet s'appliquant durant cette période  $\tau$  serait évalué, sous la mesure forward (jusqu'à la date de règlement) risque-neutre appropriée, par la formule de Black (1976). Les taux forward sous la dynamique du modèle de marché LIBOR évoluent sous une mesure forward risque-neutre  $Q^\beta$  selon l'équation

---

5. Il n'est pas rare, dans la littérature, que certains emploient les termes BGM et modèle de marché LIBOR de manière interchangeable.

sans dérive suivante :

$$dF(t; T_\alpha, T_\beta) = \sigma_\beta(t)F(t; T_\alpha, T_\beta)dW_t^{Q^\beta} \quad (2.5)$$

Miltersen, Sandmann, et Sondermann (1997), Jamshidian (1997) et Musiela et Rutkowski (1997) contribuèrent aussi significativement au développement de cette catégorie de modèles.

Plusieurs raisons motivent l'acceptation universelle du modèle de marché. Tout d'abord, comme nous avons mentionné précédemment, la tarification des dérivés sur taux d'intérêt par la formule de Black (1976). Ensuite, la modélisation de quantités directement observables soit les taux LIBOR 3 mois ou les taux swaps. Aussi, le modèle de marché permet d'exprimer aisément la volatilité des taux forward et les corrélations entre les différents taux forward. C'est cet aspect particulier qui rend le modèle de marché si attrayant aux négociateurs, car ils jonglent continuellement avec ces quantités. Malgré ces propriétés qualitatives intéressantes, le postulat de la log-normalité des taux d'intérêt forward ou swap engendre le même problème que sous le modèle de Black (1976), soit l'hypothèse d'une surface de volatilité plate ce qui est empiriquement erroné. Cette lacune forcera la conception de modèles qui tenteront de modéliser des surfaces de volatilité non constante.

Le plus récent paradigme dans le développement des modèles à taux d'intérêt stochastique est la modélisation du *smile* de volatilité. Le *smile* de volatilité affecte directement les volatilités des dérivés sur taux d'intérêt et peut donc avoir un impact non négligeable sur la tarification et la couverture des dérivés sur taux d'intérêt. Plusieurs catégories de modèles ont été proposées dans la littérature pour tenter de formaliser le problème du *smile*<sup>6</sup>. Tout d'abord, les modèles à volatilité locale tentent de modéliser le *smile* en modifiant le mouvement brownien géométrique suivi par les taux forward défini par l'équation (2.5) en y incorporant l'influence du niveau des taux forwards. L'avantage de ces modèles est double. D'une part, la possibilité de dériver des formules ana-

---

6. Brigo et Mercurio (2006) font une excellente revue des nombreux modèles développés jusqu'à aujourd'hui.

lytiques. D'autre part, l'ajout du niveau du taux forward dans l'équation (2.5) n'ajoute aucune source d'incertitude supplémentaire gardant ainsi la propriété de marché complet. Les principaux modèles de cette catégorie sont ceux développés par Cox et Ross (1976), appliqués spécifiquement dans le cas du modèle de marché LIBOR par Andersen et Andreasen (2000), et le modèle à diffusion décalée introduit par Rubinstein (1983). Aussi, Dupire (1994, 1997) et Derman et Kani (1994, 1998) postulent la présence d'une dynamique unique capable d'expliquer l'entière des options conditionnelle à la disponibilité d'une surface de volatilité complète. Malheureusement, trouver une dynamique risque-neutre unique capable de tarifier la totalité des options disponibles est un problème largement sous-déterminé. Récemment, Brigo, Mercurio, et Sartorelli (2003) et Brigo et Mercurio (2000a,b, 2002, 2003) ont remédié à ce problème sous-déterminé en proposant des dynamiques spécifiques du processus risque-neutre. Il en résulte des modèles à volatilités locales flexibles permettant de récupérer un large éventail de surfaces de volatilités. Néanmoins, Hagan et al. (2002) questionnent la validité des modèles à volatilité locale en démontrant que leur dynamique évolue dans le sens contraire aux observations empiriques. L'introduction des modèles à volatilité stochastique viendra corriger cette lacune.

Les modèles à volatilité stochastique supposent que la volatilité des taux forward,  $\sigma_\beta$  dans l'équation (2.5), n'est ni constante ni déterministe, mais suit un processus stochastique qui est potentiellement corrélé avec celui qui gouverne l'évolution des taux forward. En modélisant la volatilité de façon stochastique, il devient aisé de générer une grande variété de formes de surface de volatilité en plus de prédire adéquatement l'évolution future de celle-ci. Un des modèles à volatilité stochastique les plus populaires fut proposé par Heston (1993)<sup>7</sup> et adapté au contexte des dérivés sur taux d'intérêt par l'entremise d'un cadre de modèle de marché par Wu et Zhang (2006, 2008). Un autre modèle très populaire en pratique est le modèle principal à l'étude dans cette recherche, soit le modèle SABR proposé par Hagan, Kumar, Lesniewski, et Woodward (2002). La particularité de ce modèle à volatilité stochastique est la présence de formules analytiques utilisant la formule de Black (1976)

---

7. Nous notons aussi la popularité des modèles de Hull et White (1987) et Stein et Stein (1991).

pour tarifier les dérivés sur taux d'intérêt, ce qui explique principalement sa grande popularité chez les négociateurs. Le modèle SABR s'avère même un standard sur certains marchés selon Rebonato (2007) et Rebonato et White (2009). D'autres modèles à volatilité stochastique ont été proposés par Andersen et Brotherton-Ratcliffe (2005), Joshi et Rebonato (2003) et Piterbarg (2005). Toutefois, les modèles à volatilité stochastique sont généralement beaucoup plus complexes à implanter que les modèles à volatilité locale et les formules analytiques proposées sont généralement constituées d'approximations. De plus, l'introduction d'une source de risque additionnelle vient éliminer la propriété de marché complet.

D'autres catégories, telles que les processus à sauts (Glasserman et Kou (2003)) et les modèles de Lévy, furent développées pour modéliser le *smile* de volatilité. Cependant, tel que l'affirme Brigo et Mercurio (2006), ces modèles ont une utilisation plutôt limitée dans le contexte du marché des dérivés sur taux d'intérêt, due majoritairement aux difficultés d'implantation de ces types de modèles.

## 2.2 Littérature empirique

Il existe une dichotomie importante entre les conceptions théoriques décrites à la section précédente et la validation empirique des modèles s'appliquant à évaluer la performance de tarification et de couverture des dérivés sur taux d'intérêt. Cette dichotomie est d'autant plus surprenante en considérant la profondeur et la portée du marché des dérivés sur taux d'intérêt. Le retard accumulé par la recherche empirique est majoritairement causé par la nature gré à gré des transactions de dérivés sur taux d'intérêt, ce qui occasionne une plus grande opacité du marché et une difficulté à comptabiliser efficacement les données. Ce n'est que récemment que les cotations sont devenues plus transparentes et surtout accessibles par les plateformes d'informations financières telles que Bloomberg. Nonobstant la grande variété de dérivés sur taux d'intérêt, cette revue de la littérature empirique se concentrera uniquement sur les

articles traitants de la performance de tarification et de couverture des dérivés sur taux d'intérêt de type caps et swaptions.

Dans un contexte d'évaluation de la performance de tarification, Chuang et Ritchken (1999) testent un modèle de type HJM markovien à trois variables d'états et constatent que leur modèle réplique de façon satisfaisante les caplets ATM<sup>8</sup> et que l'inclusion de paramètres variant chronologiquement n'est pas essentielle. Ensuite, Hull et White (2000) testent un modèle de marché LIBOR pour une panoplie de taux d'exercices et d'échéances et constatent que les erreurs de tarifications sont plus grandes pour les caps que pour les swaptions. Toutefois, Hull et White (2000) effectuent leurs tests pour une journée seulement. De plus, Longstaff, Santa-Clara, et Schwartz (2001) développent un modèle de marché LIBOR *string* et comparent la performance de tarification des caps et swaptions ATM. Longstaff et al. (2001) constatent que 4 facteurs sont nécessaires pour expliquer le prix des swaptions et que le prix des caps dévie périodiquement du prix des caps sans arbitrage implicitement définis par le marché des swaptions. Aussi, Moraleda et Pelsser (2000) évaluent la performance de tarification de trois modèles de taux court et deux modèles HJM sur une série chronologique de caps s'échelonnant de 1993 à 1994. Moraleda et Pelsser (2000) concluent que les modèles de taux court performant mieux que les modèles HJM. Finalement, Jarrow, Li, et Zhao (2007) arguent que bien qu'un modèle de marché LIBOR à volatilité stochastique à 3 facteurs capte bien les mouvements des caps ATM, lorsque l'on tient compte de toute la surface de volatilité, il est primordial d'ajouter des sauts négatifs aux mouvements des taux d'intérêt pour reproduire correctement le *smile* de volatilité dans le marché des caps. Qui plus est, la base de données, composée de 53 caps de différentes échéances et portant sur plusieurs taux d'exercices, utilisée par Jarrow et al. (2007) est assurément la plus complète employée à ce jour pour une étude empirique dans le marché des dérivés sur taux d'intérêt.

Le recensement de cinq articles démontre que le développement du corpus

---

8. Signifie *At-the-money*. Un caplet est défini ATM si son taux d'exercice est équivalent au taux forward swap s'appliquant durant la même période. Un swaption est considéré ATM lorsque son taux d'exercice équivaut au taux forward swap pour un swap d'échéance correspondante.

littéraire afférent à l'évaluation de la performance d'arbitrage en couverture des dérivés sur taux d'intérêt de type cap ou swaption est encore au stade embryonnaire. En premier lieu, Longstaff et al. (2001) se basent sur un échantillon de 128 semaines, durant la période 1997 à 1999, pour comparer la performance de leur modèle de marché LIBOR *string* à quatre facteurs au modèle de Black (1976) dans la couverture des risques de swaptions ATM. Longstaff et al. (2001) constatent que la différence entre les deux modèles est économiquement insignifiante. En deuxième lieu, Fan, Gupta, et Ritchken (2007) étudient, durant une période de 70 semaines de 1998 à 2000, le nombre de facteurs nécessaires pour tarifier et couvrir les risques associés aux swaptions ATM. Fan et al. (2007) concluent que pour tarifier les swaptions les modèles à un et deux facteurs produisent des résultats comparables aux modèles à plusieurs facteurs. Néanmoins, pour les opérations d'arbitrage en couverture les modèles à plusieurs facteurs performant mieux et de façon probante par rapport aux modèles à un facteur. En troisième lieu, Driessen, Klaassen, et Melenberg (2003) éprouvent de 1995 à 1999, soit une période de 232 semaines, la performance de tarification et de couverture de caps et de swaptions ATM de modèles HJM de 1 à 3 facteurs. Driessen et al. (2003) notent que les modèles à un facteur réussissent à tarifier de manière satisfaisante les caps et les swaptions. En ce qui concerne la performance de couverture, Driessen et al. (2003) observent que le choix des instruments et la méthode de couverture employée jouent un rôle prépondérant, plus que le choix d'un modèle en particulier. En quatrième lieu, Gupta et Subrahmanyam (2005) constatent que les modèles à un facteur qui répliquent la distribution log-normale obtiennent des résultats satisfaisants lors de la tarification des caps. Néanmoins, pour la couverture des risques, Gupta et Subrahmanyam (2005) arguent que l'inclusion d'un deuxième facteur stochastique dans un modèle améliore significativement la performance de couverture des caps et des floors et est plus importante que de répliquer la distribution. Gupta et Subrahmanyam (2005) concluent que les modèles à 2 facteurs sont préférables pour tarifier et couvrir les risques des caps et des floors. L'atout de l'article de Gupta et Subrahmanyam (2005) est l'utilisation, pour la première fois dans la littérature empirique, de caps et de floors portant sur différents taux d'exercices. Leur base de données est composée, pour les caps et les floors,

de 4 échéances portant sur 4 taux d'exercices pour une période de 219 jours. Quoique, Li et Zhao (2006) questionnent la fiabilité des données utilisées par Gupta et Subrahmanyam (2005). En effet, les données utilisées par Gupta et Subrahmanyam (2005) correspondent à la période turbulente du 1<sup>er</sup> mars au 31 décembre 1998. En effet, durant cette période l'économie mondiale fait face à deux crises majeures soit la crise financière russe et l'effondrement du fond de couverture LTCM<sup>9</sup>. La critique de Li et Zhao (2006) peut s'appliquer à l'ensemble des études d'évaluation de la performance des opérations d'arbitrage en couverture présentées jusqu'à présent, car chacune de ses études porte sur un échantillon qui comprend cette période mouvementée. En cinquième lieu, Li et Zhao (2006) étudient la performance de tarification et de couverture des risques d'un modèle de la classe affine quadratique et tentent de vérifier l'hypothèse que les obligations zéro-coupon et les dérivés sur taux d'intérêt sont influencés par les mêmes facteurs. Li et Zhao (2006) arguent que leur modèle a de sérieuses difficultés à couvrir les risques des caps et des stellages<sup>10</sup> de caps, même s'il capture bien les mouvements des obligations zéro-coupon. Li et Zhao (2006) emploient la même base de données que Jarrow et al. (2007), à l'exception d'une année en moins, et constituent donc la base de données la plus complète des études évaluant la performance d'opérations d'arbitrage en couverture présentées.

L'article de Li et Zhao (2006) traite d'un des problèmes les plus effervescents actuellement dans la littérature des dérivés sur taux d'intérêt. En effet, la possible présence de facteurs idiosyncratiques liés à la volatilité<sup>11</sup> a monopolisé une partie de la littérature empirique des dérivés sur taux d'intérêt. Le sujet n'est pas sans débat. Jagannathan, Kaplin, et Sun (2003) évaluent des modèles de type CIR à un et plusieurs facteurs et démontrent que plus on augmente le nombre de facteurs, plus le modèle capturera correctement l'évolution des taux LIBOR et swap. Jagannathan et al. (2003) constatent cependant que leur modèle n'est pas capable de tarifier les swaptions correctement et postulent la nécessité d'utiliser des modèles non affines. Collin-Dufresne et Goldstein (2002)

---

9. Long Term Capital Management.

10. Plus communément nommé *straddle*.

11. Dans la littérature cet effet est nommé *unspanned stochastic volatility*.



renchérissent et affirment qu'il y a des facteurs idiosyncratiques liés à la volatilité qui influencent le prix des swaptions. Similairement, Heidari et Wu (2003) déterminent qu'il y a présence d'au moins 3 facteurs additionnels expliquant les variations de la surface de volatilité des swaptions. Li et Zhao (2006) confirment aussi ce phénomène pour le marché des caps. Au contraire, Gupta et Subrahmanyam (2005) affirment que la couverture des risques des caps et floors est satisfaisante lorsque l'on utilise un portefeuille composé seulement de caps et de contrats Eurodollar. Fan et al. (2003) arrivent à la même conclusion dans le cas des swaptions.

# Chapitre 3

## Modélisation

### 3.1 Le *smile* de volatilité

Dans ce chapitre, le problème du *smile* de volatilité sera abordé dans la première section de façon formelle, comme présentée dans Brigo et Mercurio (2006)[chap.9]. Par conséquent, les fondements théoriques justifiant l'incapacité du modèle de marché LIBOR et corollairement le modèle de Black (1976) à saisir le *smile* de volatilité seront beaucoup plus limpides. Ensuite, on identifiera les principales causes de la présence du *smile* de volatilité. Aussi, on introduira les différents modèles utilisés dans cette recherche.

#### 3.1.1 Le problème du *smile*

Tout d'abord, considérons un caplet d'un montant notionnel unitaire avec une date de fixation des cours  $T_\alpha$  et une date d'échéance  $T_\beta$  équivalente à la date de paiement des flux monétaires. De plus, supposons  $T_\beta - T_\alpha = \tau$  correspondant à 3 mois, ce qui représente le standard sur le marché nord-américain<sup>12</sup>. Le taux d'exercice de ce caplet équivaut à  $K$ . Le caplet étant une option d'achat de type européenne portant sur un taux forward, le taux LIBOR 3 mois dans le

---

12. Le marché européen considère  $T_\beta - T_\alpha = \tau$  correspondant à 6 mois.

cas du marché américain, implique la profitabilité à l'échéance :

$$\tau(F(T_\alpha; T_\alpha, T_\beta) - K)^+.$$

La valeur au marché de ce caplet résultera de l'actualisation des flux monétaires prévus à l'échéance selon :

$$E \left[ \exp \left( - \int_0^{T_\beta} r(s) ds \right) \tau(F(T_\alpha; T_\alpha, T_\beta) - K)^+ \right].$$

Cependant, comme le démontre Brigo et Mercurio (2006)[chap.6], on doit employer une technique de changement de numéraire afin de changer la mesure de probabilité sous laquelle on calcule l'espérance, pour ainsi pouvoir séparer le facteur d'actualisation stochastique du flux monétaire. Ainsi, en supposant que le compte du marché monétaire correspond à  $B(t) = B(0) \exp \left( \int_0^t r(s) ds \right)$  et que la mesure forward risque-neutre  $Q^\beta$  correspond à la mesure associée au numéraire  $P(\cdot, T_\beta)$  on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} E^B \left[ \frac{B(0)}{B(T_\beta)} \tau(F(T_\alpha; T_\alpha, T_\beta) - K)^+ \right] = \\ E^{Q^\beta} \left[ \frac{P(0, T_\beta)}{P(T_\beta, T_\beta)} \tau(F(T_\alpha; T_\alpha, T_\beta) - K)^+ \right]. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété que  $P(T_\beta, T_\beta) = 1$ , cette technique de changement de numéraire permet donc d'exprimer le prix du caplet selon :

$$\begin{aligned} E \left[ \exp \left( - \int_0^{T_\beta} r(s) ds \right) \tau(F(T_\alpha; T_\alpha, T_\beta) - K)^+ \right] = \\ P(0, T_\beta) \tau E_0^{Q^\beta} [(F(T_\alpha; T_\alpha, T_\beta) - K)^+]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ces manipulations effectuées, il ne reste plus qu'à calculer l'espérance  $E_0^{Q^\beta}$  dans l'équation (3.1) pour obtenir le prix du caplet. Par contre, en raison de la positivité de l'opérateur  $(\cdot)^+$ , la valeur au marché du caplet ne dépend donc pas uniquement de la moyenne de  $F$ , mais dépendra aussi de sa variance. Donc, afin d'évaluer la valeur du caplet au marché, il est nécessaire de spécifier la dynamique caractérisant l'évolution de  $F$  ou en d'autres termes définir

la distribution de probabilité de  $F$ . Le modèle de marché LIBOR caractérise l'évolution de  $F$  sous la mesure forward risque-neutre  $Q^\beta$  selon l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dF(t; T_\alpha, T_\beta) = \sigma_\beta(t) F(t; T_\alpha, T_\beta) dW_t^{Q^\beta}. \quad (3.2)$$

La dynamique (3.2) implique la log-normalité de  $F$  définie telle que :

$$\ln(F(T_\alpha; T_\alpha, T_\beta)) \sim \mathcal{N} \left( \ln(F(0; T_\alpha, T_\beta)) - \frac{1}{2} \int_0^{T_\alpha} \sigma_\beta^2(t) dt, \int_0^{T_\alpha} \sigma_\beta^2(t) dt \right). \quad (3.3)$$

La valeur au marché du caplet sera le résultat du calcul de l'espérance  $E_0^{Q^\beta}$  dans l'équation (3.1) dépendante de la distribution de  $F$  donnée par (3.3), ce qui est évidemment équivalent à la formule de Black (1976) :

$$Caplet^{Black}(0, T_\alpha, T_\beta, \tau, K) = P(0, T_\beta) \tau Bl(K, F(0; T_\alpha, T_\beta), v_\beta)$$

$$v_\beta^2 = \int_0^{T_\alpha} \sigma_\beta^2(t) dt$$

Sous le cadre d'analyse du modèle de marché LIBOR, il est important de distinguer la différence entre la fonction  $\sigma_\beta$  qui représente la volatilité instantanée du taux forward  $F$  avec une date de fixation de  $T_\alpha$  et la volatilité Black (1976) du caplet qui est cotée sur le marché. En effet, les deux quantités suivent la relation suivante :

$$\sigma_{Black}(T_\alpha) = \sqrt{\frac{1}{T_\alpha} \int_0^{T_\alpha} \sigma_\beta^2(t) dt} = \frac{v_\beta}{\sqrt{T_\alpha}} \quad (3.4)$$

La volatilité de Black (1976) cotée sur le marché correspond donc à la racine carrée de la volatilité instantanée moyenne du taux forward. De plus, on peut facilement observer que sous les hypothèses du modèle de marché LIBOR la volatilité des caplets dépend uniquement de la variance instantanée du taux forward. En effet, on peut remarquer que  $v_\beta^2$  sur l'intervalle  $[0, T_\alpha]$  ne dépend aucunement du taux d'exercice  $K$ . Donc, la volatilité doit être en théorie égale pour n'importe quelle valeur de  $K$ .

Cependant, le marché des caplets n'exhibe pas une structure de volatilité plate. Généralement, chaque caplet nécessitera sa propre volatilité Black (1976). Ainsi, le marché utilise, tel que mentionné par Brigo et Mercurio (2006), la formule de Black (1976) simplement comme une mesure métrique pour exprimer le prix des caplets en terme de volatilité. De façon plus grossière, Rebonato (2002, 2004) affirme que la volatilité de Black (1976) est simplement le mauvais chiffre qui jumelé avec la mauvaise formule donne la valeur marchande du caplet. Les raisons permettant d'expliquer la présence du *smile* de volatilité seront explorées à la section suivante.

### 3.1.2 Justification du *smile*

Nous sommes d'avis que deux explications justifient la présence du *smile* de volatilité dans le marché des dérivés sur taux d'intérêt. Tout d'abord, la première explication se rapporte à une mauvaise caractérisation de la dynamique de l'évolution des taux forward postulée par le modèle de marché LIBOR. Ensuite, la deuxième explication stipule que la dynamique des taux forward est correctement spécifiée par le modèle de marché LIBOR, mais d'autres facteurs financiers et économiques motivent la présence du *smile* de volatilité.

Dans un premier temps, comme nous avons démontré à la section 3.1.1, la définition de la dynamique de l'évolution des taux forward proposée par le modèle de marché LIBOR (équation 3.2) occasionne une volatilité constante pour tous les taux d'exercices d'une échéance de caplet quelconque, ce qui est en parfaite contradiction avec les observations empiriques. De l'incapacité théorique du modèle de marché LIBOR à pouvoir cerner la présence du *smile* de volatilité découle naturellement la solution de spécifier une dynamique différente pour l'évolution des taux forwards. Ainsi, en relaxant une ou plusieurs hypothèses du modèle de marché LIBOR, il sera possible de modifier la dynamique des taux forwards. En particulier, en relaxant les hypothèses de distribution de la volatilité du taux forward indépendante du niveau du taux forward et de volatilité déterministe, on obtiendra respectivement des modèles à volatilité locale et des modèles à volatilité stochastique. Nous explorerons ces deux types de

modèles dans les sections 3.2 et 3.3 respectivement.

Dans un deuxième temps, la seconde explication ne rejette pas la dynamique de l'évolution des taux forward proposée par le modèle de marché LIBOR, mais tente plutôt de justifier la présence du *smile* de volatilité par des facteurs externes au modèle de marché LIBOR. Tout d'abord, une première justification postulée par Rebonato (2004)[chap.12] concerne le jeu de l'offre et la demande des dérivés sur taux d'intérêt. En effet, Rebonato (2004) affirme qu'en excluant la communauté des négociateurs, les consommateurs de dérivés sur taux d'intérêt tentent généralement de se prémunir des mêmes risques ce qui cause une asymétrie dans la demande de dérivés. Par exemple, les gestionnaires de fonds obligataires qui désirent se prémunir contre une hausse des taux d'intérêt feront augmenter la demande de caps, les agences hypothécaires voulant couvrir les risques de remboursement anticipé et les investisseurs qui désirent avoir un taux d'emprunt avantageux feront augmenter la demande pour les swaptions. Ensuite, une deuxième justification concerne le biais d'estimation des volatilités comme argue Hentschel (2003). Hentschel (2003) démontre que l'inversion de la formule de Black (1976), afin de coter les options en terme de volatilité implicite, est assujettie à des erreurs d'estimations importantes. Hentschel (2003) affirme que l'estimation des volatilités est hasardeuse surtout pour les options en jeu et hors jeu du à des facteurs inhérents au marché. En effet, les erreurs de mesure comme l'écart acheteur-vendeur ou la fluctuation minimale peuvent générer des intervalles de confiance extrêmement grands lors de l'estimation des volatilités implicites. De plus, Hentschel (2003) montre que même si les hypothèses du modèle de Black (1976) étaient vraies, les erreurs de mesure généreraient un *smile* dans les volatilités implicites cotées. Hentschel (2003) affirme aussi que les volatilités implicites plus élevées pour les options en jeu et hors jeu proviennent des conditions d'absence d'arbitrage. En effet, les options qui violent les conditions d'absence d'arbitrage ne sont pas cotées sur le marché et généralement ces options violent souvent la borne inférieure de la condition d'absence d'arbitrage. Ainsi, l'impossibilité de coter des volatilités implicites faibles ou même négatives provoque un biais systématiquement positif des volatilités implicites déjà cotées sur le marché. Hentschel (2003)

postule même que la présence du biais serait présent même si la distribution des taux forward était vraiment log-normale.

Bref, les deux explications apparaissent comme jouant chacune un rôle dans la présence du *smile* de volatilité sur le marché des dérivés sur taux d'intérêt. Cependant, dans cette recherche, les efforts seront canalisés à modéliser le *smile* de volatilité par un changement de la dynamique de l'évolution des taux forward caractérisée par le modèle de marché LIBOR. Dans les prochaines sections, on aborde les changements apportés à la dynamique des taux forward par les différents modèles employés dans cette recherche.

## 3.2 Modèle SABR

La modélisation choisie pour exprimer la dynamique de la structure à terme des taux d'intérêt est primordiale pour établir un système de tarification et de couverture des dérivés sur taux d'intérêt cohérent avec les cotations du marché et l'évolution future des taux d'intérêt. Cette tâche, apparemment simple, due à la multitude de modèles pouvant exécuter une telle tâche, est d'autant plus complexe s'il y a la présence du *smile* de volatilité dans les cotations de marché.

La manipulation et la maîtrise du *smile* de volatilité sont donc essentielles à un négociateur du marché des dérivés sur taux d'intérêt, car il est généralement exposé, sur les instruments qu'il négocie, à des risques portant sur une panoplie de taux d'exercices.

Une des premières classes de modèles à répondre à ce problème fut les modèles à volatilités locales développés par Dupire (1994, 1997) et Derman et Kani (1994, 1998). Cette classe de modèles, approfondis à la section 3.3, considère que le prix d'une option dépend du temps et du niveau du sous-jacent. Cependant, comme le démontre Hagan et al. (2002), ce type de modèle souffre d'une lacune fondamentale. En effet, la dynamique du *smile* de volatilité prédite par les modèles à volatilité locale est contraire à ce qu'on observe empiriquement. Plus précisément, les modèles à volatilité locale prédisent qu'à la suite d'une

hausse du taux d'intérêt sous-jacent la volatilité de l'option diminuera et à l'opposé lorsque le taux diminuera, la volatilité de l'option augmentera. Hagan et al. (2002) arguent que cet attribut propre aux modèles à volatilité locale déstabilise les mesures de risque et influencera considérablement la performance du modèle à couvrir les risques auxquels un négociateur s'expose.

Pour remédier à cette lacune, Hagan, Kumar, Lesniewski, et Woodward (2002) introduisent le modèle SABR<sup>13</sup> à volatilité stochastique. Selon Rebonato (2002)[chap.11], l'importance de la volatilité stochastique est amplifiée lors des opérations de couverture du négociateur. En effet, sous les modèles à volatilité déterministe, tels les modèles à volatilité locale, le prix des dérivés est calculé en attribuant une probabilité de réalisation de zéro aux volatilités différentes de celles obtenues par calibration. Ainsi, le négociateur doit changer lui même la volatilité pour calculer les risques associés au changement de ses cotations et donc déterminer l'opération de couverture appropriée. Cette méthode statique est au mieux imprécise selon Rebonato (2002) et amènera le négociateur à ne pas coter certaines options où le risque ne lui sera pas favorable.

### 3.2.1 Spécification du modèle SABR

Le modèle SABR modélise la dynamique du prix forward d'un actif financier sous une mesure forward risque-neutre quelconque. Selon le contexte, ce forward peut être un taux LIBOR, un taux swap forward, le rendement forward d'une obligation, etc. Cette recherche contraint ces nombreuses possibilités à une seule, soit un taux forward LIBOR. Le modèle SABR est une extension du modèle de type CEV introduit par Cox et Ross (1976) avec un deuxième facteur de volatilité stochastique et résulte donc, selon Hagan et al. (2002), de la plus simple extension possible.

Le modèle SABR formalise la dynamique du taux forward LIBOR  $F_j$  sous

---

13. SABR est en fait l'acronyme de stochastic  $\alpha\rho\beta$ , qui sont, comme nous le verrons ultérieurement, trois des quatre paramètres du modèle.



la mesure  $Q^j$  par le système d'équation différentielle stochastique suivante<sup>14</sup> :

$$\begin{aligned} dF_j(t) &= \sigma(t)F_j(t)^\beta dZ_j^j(t) \\ d\sigma(t) &= \nu\sigma(t)dW^j(t) \\ \sigma(0) &= \alpha \end{aligned} \tag{3.5}$$

où  $dZ_j^j$  et  $dW^j$  sont des  $Q^j$  mouvements brownien standard avec

$$dZ_j^j(t)dW^j(t) = \rho dt$$

Sous la dynamique (3.5),  $F_j(t)$  et  $\sigma(t)$  sont stochastiques. Les autres paramètres sont des constantes avec  $\beta \in (0, 1]$ ,  $\nu$  et  $\alpha$  sont des constantes strictement positives et  $\rho \in [-1, 1]$ . Comme le démontre Jourdain (2004), la dynamique du taux forward (3.5) est toujours une martingale lorsque  $\beta < 1$ . Lorsque  $\beta = 1$ ,  $F_j$  est une martingale seulement si  $\rho \leq 0$ .

### 3.2.2 Tarification des caplets

Excepté pour le cas  $\beta = 0$ , il n'existe aucune solution analytique au modèle SABR. Hagan et al. (2002) utilisent une technique de perturbation singulière<sup>15</sup> pour trouver une approximation du prix des caplets. Le résultat est une approximation de la volatilité implicite d'un caplet qu'il ne reste plus qu'à incorporer à la formule de tarification de Black (1976) définie par l'équation (2.1) pour obtenir le prix au marché du caplet. Cette formule est la principale réalisation du modèle. La volatilité implicite définie par le modèle SABR est ca-

14. Nous soulignons que notre notation sera similaire à celle utilisée dans Brigo et Mercurio (2006, chap. 11).

15. Précisément, Hagan et al. (2002) font une expansion autour de la volatilité  $\alpha$  et de la volatilité de la volatilité  $\nu$ . Ainsi, Hagan et al. (2002) analysent les variables  $\alpha \rightarrow \epsilon\alpha$  et  $\nu \rightarrow \epsilon\nu$  à la limite  $\epsilon \ll 1$ . Par la suite, lorsque que les résultats sont obtenus, Hagan et al. (2002) transforment  $\epsilon\alpha \rightarrow \alpha$  et  $\epsilon\nu \rightarrow \nu$  pour exprimer les résultats en terme des variables originales.

ractérisée selon :

$$\sigma^{imp}(K, F) = \frac{\alpha}{(FK)^{\frac{1-\beta}{2}} \left[ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \ln^2 \left( \frac{F}{K} \right) + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \ln^4 \left( \frac{F}{K} \right) + \dots \right]} \frac{z}{x(z)} \quad (3.6)$$

$$\cdot \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2 \alpha^2}{24(FK)^{1-\beta}} + \frac{\rho \beta \nu \alpha}{4(FK)^{\frac{1-\beta}{2}}} + \nu^2 \frac{2-3\rho^2}{24} \right] T_{j-1} + \dots \right\}$$

avec

$$z = \frac{\nu}{\alpha} (FK)^{\frac{1-\beta}{2}} \ln \left( \frac{F}{K} \right)$$

et

$$x(z) = \ln \left\{ \frac{\sqrt{1 - 2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - \rho} \right\}$$

Les pointillés dans l'équation (3.6) représentent des termes d'ordre supérieurs à quatre et qui sont selon Hagan et al. (2002) négligeables dans le cas de courtes échéances. Bien qu'imposante, cette formule constitue une approximation analytique et se comporte selon Hagan et al. (2002) de façon très précise, et ce même pour des échéances lointaines. L'attrait de cette formule réside dans le fait que la volatilité implicite donnée par (3.6) est directement introduite dans la formule de Black (1976) pour donner le prix des caplets. Ainsi, on peut remarquer pourquoi cette formule est si populaire dans la communauté des négociateurs. De plus, on peut calculer de façon quasi instantanée une variété de prix caplets pour une échéance donnée, ce qui accélère de beaucoup le processus de calibration.

Hagan et al. (2002) dérivent aussi une formule pour la tarification de caplets ATM. La volatilité implicite du caplet ATM est définie telle que :

$$\sigma_{ATM} = \sigma^{imp}(F, F) = \frac{\alpha}{F^{1-\beta}} \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2 \alpha^2}{24F^{2-2\beta}} \frac{\rho \beta \alpha \nu}{4F^{1-\beta}} + \nu^2 \frac{2-3\rho^2}{24} \right] T_{j-1} + \dots \right\} \quad (3.7)$$

Comme mentionné par Hagan et al. (2002), la complexité de la formule (3.6)

vient obscurcir le comportement qualitatif du modèle. Afin de mieux comprendre le rôle de chaque paramètre, Hagan et al. (2002) dérivent une autre approximation basée sur une expansion de l'équation (3.6) en puissances de  $\ln(K/F)$  :

$$\begin{aligned} \sigma^{imp}(K, F) = & \frac{\alpha}{F^{1-\beta}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1 - \beta - \rho\lambda) \ln\left(\frac{K}{F}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{12}[(1 - \beta)^2 + (2 - 3\rho^2)\lambda^2] \ln^2\left(\frac{K}{F}\right) + \dots \right\} \quad (3.8) \end{aligned}$$

avec le ratio

$$\lambda = \frac{\nu}{\alpha} F^{1-\beta},$$

qui représente selon Hagan et al. (2002), la force de la volatilité de la volatilité  $\nu$  par rapport à la volatilité locale  $\frac{\alpha}{F^{1-\beta}}$ . Le premier terme de l'équation (3.8), soit  $\frac{\alpha}{F^{1-\beta}}$  est équivalent à celui de l'équation (3.7) et représente le pivot par lequel traverse les cotations d'options ATM. On remarque que ce pivot est entièrement représenté par le coefficient  $\beta$ . Le deuxième terme  $-\frac{1}{2}(1 - \beta - \rho\lambda) \ln\left(\frac{K}{F}\right)$  est équivalent au *skew*, soit la pente de volatilité implicite par rapport à  $K$ . On constate deux contributions à la pente. D'une part, le *beta skew*,  $-\frac{1}{2}(1 - \beta)$  qui est toujours négatif, car  $\beta \in (0, 1]$ . D'autre part, le *vanna skew*<sup>16</sup>  $\frac{1}{2}\rho\lambda$  représente la corrélation entre le taux forward et sa volatilité. Selon Hagan et al. (2002), la corrélation entre le taux forward et sa volatilité est généralement négative et donc en moyenne la volatilité  $\alpha$  augmenterait (diminuerait) avec une augmentation (diminution) de  $F$ . Le résultat net d'une corrélation  $\rho$  négative serait une pente négative pour le *vanna skew*. Le dernier terme de l'équation (3.8) qui est responsable de la convexité est influencé selon deux axes. Tout d'abord,  $\frac{1}{12}(1 - \beta)^2$  est proportionnel de façon quadratique au *beta skew*. Ensuite,  $\frac{1}{12}(2 - 3\rho^2)\lambda^2$  représente le *volga skew*<sup>17</sup>. Concrètement, l'effet du *volga skew* sur le *smile* provient de la nature du mouvement des taux forward. Manifestement, la variation des taux forward est beaucoup plus im-

16. Le *vanna skew* représente le changement du delta causé par un changement de la volatilité.

17. Une combinaison des termes volatilité et gamma. Le *volga skew* représente la deuxième dérivée par rapport à la volatilité ou autrement le changement du vega causé par un changement de la volatilité.

portante en période de volatilité élevée qu'en période de volatilité basse, les taux d'exercices définitivement hors jeu représentent selon Hagan et al. (2002) un environnement à haute volatilité et expliquent l'effet du *volga skew* sur les options hors jeu.

### 3.2.3 Mesures des risques

Les risques des dérivés sur taux d'intérêt sont nombreux, mais cette recherche se concentre sur la performance de couverture du risque delta<sup>18</sup>. Les autres mesures de risques bien que pertinentes en pratique ne seront pas discutées dans cette recherche. Contrairement aux modèles à volatilité stochastique standards, où la simulation de Monte-Carlo est nécessaire pour calculer les risques, le modèle SABR permet de dériver des expressions analytiques pour le calcul du delta des dérivés sur taux d'intérêt. Cet avantage permet donc à un négociateur de coter un dérivé sur taux d'intérêt quelconque et établir une stratégie de couverture instantanément.

Le calcul des risques associé au delta est effectué en variant la valeur du sous-jacent tout en gardant la volatilité implicite fixe, soit :

$$\begin{aligned} F &\rightarrow F + \Delta F \\ \sigma &\rightarrow \sigma \end{aligned}$$

En calculant la dérivé du prix de l'option  $V_{call}$  par rapport à  $F$ , on obtient :

$$\Delta \equiv \frac{\partial V_{call}}{\partial F} = \frac{\partial BS}{\partial F} + \frac{\partial BS}{\partial \sigma_B} \frac{\partial \sigma_B(K, F, \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial F} \quad (3.9)$$

Le premier terme à la droite de l'équation représente le delta calculé par le modèle de Black (1976). Le deuxième terme est la correction apportée par le modèle SABR, qui consiste au vega de Black (1976) multiplié par le changement de la volatilité implicite  $\sigma_B$  résultant du changement du taux forward

---

18. Les stratégies de couverture appliquées dans cette recherche sont traitées plus en détail à la section 5.2.3.

$F$ . On constate que le modèle SABR, contrairement aux modèles à volatilité locale, en prédisant correctement le sens des mouvements du taux forward par rapport à sa volatilité, permettra de calculer des mesures de risque cohérentes.

N'étant pas satisfait de la formule de delta risque original, Bartlett (2006) affirme que l'inclusion de nouveaux termes dans les formules de risque auront un impact moindre si on couvre les risques de delta et vega, mais l'impact sera énorme si on ne fait que couvrir le risque delta. Bartlett (2006) indique que le taux forward sous-jacent est corrélé avec la volatilité SABR stochastique  $\alpha = \sigma(0)$ . Ainsi, lorsque le taux forward varie, la volatilité  $\sigma(0)$  variera aussi en moyenne. Cet effet ajoutera des nouveaux termes dans la formule originale (3.9).

La corrélation entre  $\alpha$  et  $F$  implique :

$$\begin{aligned} F &\rightarrow F + \Delta F \\ \alpha &\rightarrow \alpha + \delta_F \alpha \end{aligned}$$

où  $\delta_F \alpha$  représente le changement moyen causé par une variation de  $F$ . La nouvelle formule de risque delta est définie par :

$$\Delta = \frac{\partial BS}{\partial F} + \frac{\partial BS}{\partial \sigma_B} \left( \frac{\partial \sigma_B(K, F, \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial F} + \frac{\partial \sigma_B(K, F, \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial \alpha} \frac{\rho \nu}{F^{1-\beta}} \right) \quad (3.10)$$

Selon Bartlett (2006) couvrir ce risque est plus efficace que le risque delta original du modèle SABR. Le nouveau terme dans l'équation (3.10) est le risque vega du modèle SABR original proportionnel à  $\frac{\rho \nu}{F^{1-\beta}}$ . C'est pourquoi dans un portefeuille insensible aux risques de delta et vega cet ajustement est négligeable. Une autre façon de constater la différence entre les mesures de risque (3.9) et (3.10) est que le risque delta dépendra beaucoup plus du *smile* observé et moins de comment on le paramétrise. Comme nous avons préalablement mentionné, cette recherche se concentrant uniquement sur la performance de couverture du risque delta, il y aurait théoriquement un avantage à employer l'équation (3.10). Ainsi, nous utiliserons les deux formules de

risque et pourront donc jauger empiriquement l'apport des nouveaux termes introduits par Bartlett (2006).

### 3.2.4 Avantages et limitations du modèle SABR

La présentation du modèle SABR se termine en abordant ses principales caractéristiques, qui lui permettent de se démarquer en pratique, mais aussi d'être sujet à des critiques.

Le modèle SABR possède plusieurs qualités qui lui ont promptement permis de devenir une référence sur le marché des dérivés sur taux d'intérêt. En effet, contrairement aux modèles à volatilité locale, le modèle SABR cerne bien l'évolution du prix des options et prédit correctement le mouvement de la volatilité en réponse à une variation du taux forward sous-jacent. De plus, la formule de tarification est cohérente avec la formule de Black (1976) qui est, comme nous avons mentionné à plusieurs reprises, la référence sur le marché des dérivés sur taux d'intérêt. La disponibilité de formules analytiques pour tarifier et pour quantifier les risques facilite grandement son implantation et permet de mettre à jour rapidement les cotations de différentes options. Aussi, les paramètres et leur influence intuitive sur le *smile* en font un modèle de choix pour les négociateurs.

Le défaut majeur du modèle SABR est qu'il modélise seulement l'évolution d'un taux forward. Concrètement, il est seulement applicable à des options d'échéance identique et portant sur le même sous-jacent. Il est théoriquement non justifiable d'utiliser le modèle SABR, dans sa forme décrite aux sections précédentes, pour tarifier une surface de volatilité entière. Un cadre d'analyse plus cohérent avec l'utilisation de plusieurs options sur une multitude d'échéances est le cadre d'analyse du modèle de marché LIBOR, qui est cependant incapable de rivaliser avec le modèle SABR pour saisir le *smile* de volatilité. Ainsi, le modèle SABR ne peut pas en théorie tarifier les options plus exotiques qui dépendent de plusieurs taux forward. Le modèle SABR ne peut pas non plus caractériser l'évolution future de la structure à terme des taux. De

plus, un autre défaut notable est la nature approximative de l'équation (3.6). En effet, même si Hagan et al. (2002) considèrent que leur formule est très précise rien n'assure qu'elle le restera pour tous les niveaux de paramètres. D'ailleurs, plusieurs auteurs, dont Oblój (2008) et Paulot (2009), ont tenté de raffiner l'approximation originale. Finalement, la volatilité du modèle SABR n'exhibe pas de propriété de retour à la moyenne. Cette caractéristique est anodine tant que la distribution terminale du taux forward est bien spécifiée, car le modèle caractérise seulement l'évolution d'un taux forward. Les lacunes du modèle SABR n'en font pas moins un excellent modèle et tel qu'avancé par Rebonato (2007) et Rebonato et White (2009), le modèle SABR est devenu la référence pour tarifier les options européennes standards sur le marché des dérivés sur taux d'intérêt.

### 3.3 Modèles à volatilité locale

Dans cette section, on présente les différents modèles que l'on utilise pour comparer, avec le modèle SABR, la performance empirique de tarification et de couverture. Comme nous avons mentionné à la section 3.1, afin d'obtenir des structures de volatilités plus générales, il sera nécessaire de relaxer les hypothèses de base du modèle de marché LIBOR. Une première approche, différente que celle proposée par la spécification (3.2) du modèle de marché LIBOR, consiste à supposer une volatilité déterministe dépendante non plus uniquement du temps, mais également du sous-jacent. Ainsi, on peut caractériser l'évolution du taux forward tel que :

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \sigma(t, F_j(t))dW_t \quad (3.11)$$

Les recherches de Dupire (1994, 1997) et Derman et Kani (1994, 1998) ont démontré que sous l'hypothèse de la disponibilité d'une surface de volatilités complète en terme de taux d'exercices et d'échéances, il est possible de dériver une seule dynamique de l'évolution des taux forward qui caractérisera la distribution de toutes les options. Cependant, tel que l'affirme Brigo et al.

(2003), trouver un processus qui tarifie toutes les options est un problème largement sous-déterminé, car il existe une infinité de courbes qui peuvent relier les prix des options. De plus, dans le cas spécifique de cette recherche, où nous utilisons les options dérivées sur taux d'intérêt de type caps, les cotations pour tous les taux d'exercice et toutes les échéances ne sont pas disponibles ou s'ils s'avèrent disponibles certaines de ces cotations ne seront pas très liquides, ce qui pourrait amener des distorsions dans l'estimation du processus risque-neutre postulé par Dupire (1994, 1997) et Derman et Kani (1994, 1998). Ainsi, cette méthode est difficilement applicable à notre recherche. Par contre, une solution simple proposée par Brigo et Mercurio (2000a,b, 2002) et Brigo et al. (2003) est de supposer une distribution risque-neutre paramétrique dépendante de plusieurs paramètres et possiblement dépendante du temps. Les différents choix de paramétrisation permettront de retrouver des formules analytiques en plus de pouvoir récupérer plusieurs formes de surfaces de volatilité.

L'attrait possible des modèles à volatilité locale pour un négociateur en font d'excellents candidats pour évaluer la performance de tarification et de couverture des dérivés sur taux d'intérêt. En effet, les modèles à volatilité locale introduits subséquentement possèdent tous des formules analytiques tant pour la tarification de caplet que le calcul des mesures de risques. Ces caractéristiques permettent une calibration rapide aux cotations de caplets et assurent l'obtention quasi instantanée des prix et des mesures de risque des caplets pour une surface de volatilité entière. De plus, ces caractéristiques permettent aux modèles à volatilité locale de compétitionner avec le modèle SABR au niveau de la facilité d'implantation et de la calibration. De plus, les modèles à volatilité locale permettent de caractériser l'évolution de plusieurs taux forward. Dans ce sens, si ces modèles performant de façon similaire au modèle SABR tant pour la performance de tarification que la performance de couverture, il faudrait possiblement les considérer préférables au modèle SABR étant donné la possibilité d'inférer la corrélation entre les différents taux forward et ainsi tarifier des instruments plus complexes. Par ailleurs, les modèles à volatilité locale maintiennent la propriété de marché complet. En effet, contrairement au modèle à volatilité stochastique ou les modèles avec sauts, les modèles à



volatilité locale n'ajoutent aucune source de risque additionnelle et l'univers de tarification reste complet. Un univers incomplet engendrera des opérations d'arbitrage en couverture et des prix erronés, car en univers incomplet, il existe une multitude de prix possibles. Dans les prochaines sections, on présente différentes paramétrisations de la fonction  $\sigma_j(t, F_j(t))$  de l'équation (3.11), en procédant de façon croissante à partir des modèles simples vers les modèles plus complexes.

### 3.3.1 Diffusion décalée (DD)

On débute avec la méthode la plus simple permettant de générer des structures de volatilités non constantes dans un contexte de modèle de marché LIBOR. La diffusion décalée, introduite par Rubinstein (1983), correspond à une transformation affine de la dynamique (3.2). Dans le contexte du modèle de marché, on suppose que les taux forward ne suivent plus une distribution lognormale. La lognormalité est plutôt suivie par la nouvelle variable  $X_j$  définie telle que :

$$\begin{aligned} X_j(t) &= F_j(t) + \alpha \\ dX_j(t) &= \sigma_\alpha(t) X_j(t) dW_t \end{aligned} \tag{3.12}$$

Avec  $\alpha$  une constante et  $\sigma_\alpha$  est une fonction déterministe du temps et  $W_t$  un mouvement brownien standard. En substituant  $X_j(t)$  par  $F_j(t)$  on obtient :

$$dF_j(t) = \sigma_\alpha(t)(F_j(t) + \alpha)dW_t \tag{3.13}$$

#### Tarification des caplets

L'avantage d'une telle paramétrisation c'est qu'en supposant que  $X_j(t)$  est distribué lognormalement on peut appliquer la technique de Black (1976) pour trouver une solution analytique aux prix des caplets. Plus précisément, nous

avons :

$$\begin{aligned} P(0, T_j) \tau E_0^j [(F(0; T_{j-1}, T_j) - K)^+] = \\ P(0, T_j) \tau E_0^j [(X(0; T_{j-1}, T_j) - (K + \alpha))^+] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Lorsque  $\alpha > -K$  nous pouvons facilement obtenir le prix du caplet, soit :

$$\begin{aligned} Caplet(t, T_{j-1}, T_j, \tau_j, N, K) = \\ \tau_j NP(t, T_j) Bl(F(t; T_{j-1}, T_j) + \alpha, K + \alpha, v_{DD}(t, T_{j-1})) \end{aligned} \quad (3.15)$$

avec

$$v_{DD}(t, T_{j-1}) = \int_t^{T_{j-1}} \sigma_\alpha^2(t) dt.$$

Ainsi, le prix d'un caplet lorsque le processus suivi est caractérisé par une DD est évalué avec un nouveau forward  $(F(t; T_{j-1}, T_j) + \alpha)$  et avec un nouveau taux d'exercice  $(K + \alpha)$ . Une autre façon de comprendre le modèle à diffusion décalée est de constater que le processus  $X_j(t)$  est influencé de deux façons différentes par le même mouvement brownien : une première réponse est proportionnelle au niveau du sous-jacent,  $\sigma_\alpha(t) F_j(t) dW_t$  et la deuxième est absolue et dû à la volatilité  $\sigma_\alpha(t) \alpha dW_t$ . La seule quantité inconnue et inobservable directement sur le marché est la quantité  $v_{DD}$  (ou  $\sigma_\alpha$ ).

Il existe différentes approximations proposées entre autres par Rebonato (2002, 2004) pour trouver concrètement  $v_{DD}$ . Des tests numériques, effectués par Rebonato (2004)[chap.16], démontrent la qualité et la précision de la formule que nous utiliserons. Rebonato (2004) définit  $v_{DD}$  selon l'approximation suivante :

$$\sigma_\alpha \simeq \frac{\sigma_{Black} \frac{F_j(t)}{F_j(t) + \alpha} \left(1 - \frac{1}{24} \sigma_{Black}^2 T_{j-1}\right)}{1 - \frac{1}{24} \left(\frac{F_j(t)}{F_j(t) + \alpha} \sigma_{Black}\right)^2 T_{j-1}} \quad (3.16)$$

Ainsi, on peut résoudre l'équation (3.15) en supposant une forme fonctionnelle à la structure de volatilité. La calibration spécifique du modèle DD sera explorée méticuleusement à la section 4.3.4.

### Mesure des risques

Sous le modèle DD, le prix des caplets résultant simplement d'une transformation affine du prix donné par la formule de Black (1976), les mesures de risque d'un caplet calculées seront équivalentes elles aussi à une transformation affine des mesures de risque d'un caplet sous le modèle de Black (1976), définie selon :

$$\Delta_{DD} = N\tau P(0, T_j)\Phi(d_1(F(0; T_{j-1}, T_j) + \alpha, K + \alpha, v_{DD}(T_{j-1}))) \quad (3.17)$$

avec  $d_1$  défini par l'équation (2.1).

Il existe une autre façon assez simple d'introduire une surface de volatilités non plate. La méthode d'élasticité constante de la variance (CEV) introduite par Cox et Ross (1976) et appliquée au modèle de marché LIBOR par Andersen et Andreasen (2000). Cependant, cette méthode est pratiquement équivalente à la diffusion décalée telle que le démontre Marris (1999). Nous avons donc choisi de considérer seulement un des deux modèles soit la diffusion décalée. Ce choix est motivé en partie par la présence de formules analytiques pour la diffusion décalée<sup>19</sup> qui diminue les risques numériques liés au modèle d'Andersen et Andreasen (2000), comme développé par Rebonato (2002, 2004)<sup>20</sup>.

#### 3.3.2 Mélange de densités log-normales (LM)

Un autre modèle dans la catégorie des modèles à volatilité locale bien différent que la DD a été introduit par Brigo et Mercurio (2000a) et traité plus en détail dans Brigo et Mercurio (2000b, 2002, 2003) et Brigo et al. (2003). Sous ce modèle les taux forward ne sont plus caractérisés par une unique distribu-

19. Des formules analytiques basées sur une distribution chi carrée sont proposées dans Andersen et Andreasen (2000) et Hull et White (2000), mais Rebonato (2002) affirme que ces formules constituent seulement des approximations, car pour un coefficient arbitraire  $\beta$ , il n'est pas possible de trouver une solution analytique à l'équation différentielle stochastique suivie par le taux forward.

20. On confirme les difficultés d'implantation numérique, ayant testé le modèle d'Andersen et Andreasen (2000) sur nos données.

tion log-normale, mais par un mélange de  $N$  densités log-normales chacune possédant sa propre volatilité déterministe  $\sigma_i(t)$  et chacune pondérée par une probabilité  $\lambda_i$  avec la contrainte  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ .

Pour dériver le modèle LM, Brigo et Mercurio (2000a) font l'hypothèse que sous la mesure risque-neutre  $Q^j$  le densité marginale de  $F_j$  est équivalente à une somme pondérée de densités connues d'un processus quelconque. Brigo et Mercurio (2000a) motivent l'imposition d'un tel postulat en affirmant que les formules analytiques du modèle LM pourront être dérivé aisément. Formellement, en considérant l'équation (3.11), Brigo et Mercurio (2000a) désirent dériver la volatilité locale  $\sigma(t, F_j(t))$  afin que la densité  $p_t(y)$  de  $F_j(t)$  sous  $Q^j$  soit représentée par la relation :

$$p_t(y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i p_t^i, \quad (3.18)$$

avec  $\lambda_i$  des constantes strictement positive sous la contrainte  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ . Brigo et Mercurio (2000a) supposent que pour chaque  $i$ ,

$$v_i(t, y) = \sigma_i(t)y, \quad (3.19)$$

où toutes les fonctions  $\sigma_i$  sont des fonctions continues dépendantes du temps. Ainsi, chaque densité marginale  $p_t^i$  obéira à une densité log-normale définie selon :

$$p_t^i = \frac{1}{yV_i(t)\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2V_i^2(t)} \left[ \ln \frac{y}{F_j(0)} + \frac{1}{2}V_i^2(t) \right]^2 \right\} \quad (3.20)$$

avec

$$V_i(t) = \sqrt{\int_0^t \sigma_i^2(u) du}$$

Brigo et Mercurio (2000a) caractérisent la dynamique de l'évolution des taux forward selon :

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = v(t, F_j(t))dW_t \quad (3.21)$$

avec

$$v(t, y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i \sigma_i^2(t) \frac{1}{V_i(t)} \exp \left\{ -\frac{1}{2V_i^2(t)} \left[ \ln \frac{y}{F_j(0)} + \frac{1}{2} V_i^2(t) \right]^2 \right\}}{\sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{1}{V_i(t)} \exp \left\{ -\frac{1}{2V_i^2(t)} \left[ \ln \frac{y}{F_j(0)} + \frac{1}{2} V_i^2(t) \right]^2 \right\}}}$$

La fonction  $v(t, y)$  est spécifiquement choisie par Brigo et Mercurio (2000a) pour permettre à l'équation différentielle stochastique (3.21) d'avoir une solution unique donnée par le mélange des densités log-normale (3.20). Sous un autre angle, la fonction  $v(t, y)$  a été choisie arbitrairement par Brigo et Mercurio (2000a) pour obtenir le mélange de densités log-normales souhaité. D'ailleurs, Brigo et Mercurio (2000a) mentionnent que la volatilité locale  $v(t, y)$  peut être considérée comme une moyenne pondérée des volatilités marginales au carré  $\sigma_1^2(t), \dots, \sigma_N^2(t)$ .

### Tarification des caplets

Un des objectifs de Brigo et Mercurio (2000a) était de conserver une certaine ressemblance avec la formule de Black (1976). En effet, Brigo et Mercurio (2000a) suppose que le prix d'un caplet obéit à la relation suivante :

$$\begin{aligned} P(0, T_j) \{ [F_j(T_{j-1}) - K]^+ \} &= P(0, T_j) \int_0^{+\infty} (y - K)^+ p_{T_{j-1}}(y) dy \\ &= P(0, T_j) \sum_{i=1}^N \lambda_i \int_0^{+\infty} (y - K)^+ p_{T_{j-1}}^i(y) dy \end{aligned}$$

Ainsi, sous la dynamique (3.21) on obtient le prix du caplet au temps  $t$  selon :

$$Caplet(t, T_{j-1}, T_j, \tau_j, \tilde{N}, K) = \tau_j \tilde{N} P(t, T_j) \sum_{i=1}^N \lambda_i Bl(F(t; T_{j-1}, T_j), K, V_i(T_{j-1})) \quad (3.22)$$

avec la contrainte  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ .

Cette modélisation implique une structure du *smile* de volatilité beaucoup plus flexible qu'avec le modèle DD. Il est donc possible de récupérer un large éventail de structures de volatilités. Toutefois, la structure de volatilités supposée par le modèle LM aura toujours son minimum au niveau ATM. Cette caractéristique est prouvée formellement dans Brigo et Mercurio (2000a). De plus, la présentation mathématique du modèle LM obscurcit assurément son interprétation financière. En effet, le modèle LM implique que le taux forward  $F_j$  est un processus qui coïncide au temps  $t$  avec la densité  $p_t^i$  avec probabilité  $\lambda_i$ .

### Mesure des risques

Les mesures de risques calculées avec le modèle LM peuvent être aisément obtenues. En effet, la formalisation du modèle LM a mis en évidence que la dynamique issue d'une combinaison convexe de densités quelconque implique la même combinaison convexe du prix de l'option. En outre, de la linéarité de l'opérateur de dérivation découle la même combinaison convexe des mesures grecques de l'option. Bref, tout comme dans le cas du prix d'un caplet, le delta sera le résultat de la moyenne pondérée des deltas induits par chaque densité log-normale définie telle que :

$$\Delta_{LM} = \tilde{N}\tau P(0, T_j) \sum_{i=1}^N \lambda_i \Phi(d_1(F(0; T_{j-1}, T_j), K, V_i(T_{j-1}))) \quad (3.23)$$

avec  $d_1$  défini par l'équation (2.1).

# Chapitre 4

## Calibration

Dans ce chapitre, on présente une méthodologie, conforme à celle employée dans la pratique, pour calibrer les différents modèles introduits au chapitre 3 et ainsi pouvoir mettre en oeuvre les tests empiriques évaluant la performance de tarification et de couverture. Dans la première section, on développe une méthode itérative permettant de construire une courbe d'obligations zéro-coupon tout en préservant l'absence d'arbitrage inter-marché. Dans la deuxième section, on présente une méthode permettant d'extraire la structure à terme des volatilités des cotations de caps. Dans la troisième section, on définit les étapes de la procédure de calibration, sur notre base de données, propre à chaque modèle. Notre base de données sera traitée minutieusement à la section 5.1.

### 4.1 Courbe d'obligations zéro-coupon

La courbe d'obligations zéro-coupon est indispensable à une tarification et à la mise en place d'opérations d'arbitrage en couverture des dérivés sur taux d'intérêt cohérente. Elle permet d'obtenir une multitude de taux et de relations pertinentes à la tarification de la majorité des titres à revenu fixe. À première vue, la procédure de construction de la courbe d'obligations zéro-coupon peut sembler un exercice futile et sans conséquence. Pourtant, une mauvaise défini-

tion de la courbe d'obligations zéro-coupon garantira, peu importe le modèle utilisé, des prix et des paramètres de couverture estimés d'une validité discutable. C'est pourquoi la procédure d'estimation utilisée dans cette recherche se voudra des plus rigoureuses et correspondra au type de procédure employée empiriquement par les plus grandes institutions financières<sup>21</sup>.

Comme mentionné par plusieurs auteurs, parmi eux nous noterons Ron (2000) et Hagan et West (2005), il n'existe pas de méthode idéale pour dériver une courbe d'obligations zéro-coupon. La procédure choisie dépendra entièrement du contexte d'utilisation et d'analyse. Néanmoins, nous pouvons a priori rejeter plusieurs méthodes qui ne conviennent pas à notre type de recherche. Conséquemment, on ne considère pas les méthodes de type paramétriques, telles que les modèles de Nelson et Siegel (1987) et Svensson (1994), ou construites à l'aide de polynômes non linéaires puisqu'elles ne permettent pas de récupérer de façon exacte le prix des instruments financiers. Or, dans notre recherche, on désire évaluer la performance de tarification, il est donc primordial de restreindre au minimum les erreurs externes aux modèles étudiés diminuant du même coup les biais possibles dans nos résultats de tests. De plus, Ron (2000) mentionne que les méthodes paramétriques sont attrayantes pour des études comparatives entre pays, mais dans un contexte de tarification d'instruments financiers, il est préférable de les éviter. Dès lors, on utilisera une méthode itérative assurant l'absence d'arbitrage inter-marché et permettant de récupérer exactement le prix des instruments financiers utilisés dans la construction de la courbe d'obligations zéro-coupon. Dans cette optique, notre procédure sera influencée par les travaux de Smith (1990, 1993), Miron et Swannell (1991), Ron (2000), Malz (2002) et de Hagan et West (2005).

#### 4.1.1 Algorithme itératif

La méthodologie de construction de la courbe d'obligations zéro-coupon retenue dans cette recherche se basera sur une méthode itérative de *bootstrapping*.

---

21. Notre méthodologie est comparable à celle utilisée par les grandes banques américaines ou même les fournisseurs de services financiers tels que RiskMetrics Group et FINCAD.



Les qualités d'une telle méthode sont la récupération exacte du prix des instruments financiers utilisés dans la construction de la courbe, l'absence d'arbitrage inter-marché et la récupération d'informations précises sur les taux d'intérêt surtout dans la portion court terme de la courbe. Cette méthode débute à l'instrument financier avec la plus petite échéance et procède itérativement de manière croissante selon l'échéance des instruments financiers utilisés. Cette méthode est itérative dans le sens où à chaque étape on détermine l'obligation zéro-coupon correspondante conditionnellement à l'information obtenue jusqu'à cette date. Ainsi, notre courbe d'obligations zéro-coupon sera représentée par une série de dates auxquelles seront jointes une série d'obligations zéro-coupon.

Un point déterminant dans la construction de la courbe d'obligations zéro-coupon est le choix des instruments financiers qui la composeront. Bien qu'il n'existe aucun instrument financier obligatoire à incorporer, il existe dans la littérature un certain consensus sur les qualités que devront exhiber ces instruments. Tout d'abord, les instruments financiers devront couvrir l'horizon temporel nécessaire à l'utilisation de la courbe en tentant de couvrir uniformément les différents segments de la courbe. Dans notre recherche, nous couvrirons une période de dix années et séparerons la courbe en trois portions distinctes, soit le court, le moyen et le long terme. De plus, les instruments se doivent d'être liquides, observables et d'une même qualité de crédit. On discute des instruments financiers employés à chaque étape de la courbe dans les sections subséquentes. Finalement, on note que nous tiendrons compte de toutes les conventions, inhérentes aux différents marchés, définies selon la convention-cadre de l'ISDA<sup>22</sup>.

### Court terme

Le segment court terme de la courbe d'obligations zéro-coupon est construit à l'aide des taux LIBOR. Les taux LIBOR représentent la référence qui permet aux banques, aux maisons de courtage et aux investisseurs d'évaluer le coût

---

22. 2006 ISDA Definitions and Supplements, Novembre 2008.

des emprunts non garantis sur le marché monétaire. Notre procédure itérative incorporera les taux LIBOR au jour le jour, 1 mois, 2 mois et 3 mois. La construction de cette partie de la courbe est aisée étant donné les caractéristiques des taux LIBOR. En effet, les taux LIBOR sont des taux d'intérêt à capitalisation simple et correspondent essentiellement à des taux zéro-coupon. Le prix des obligations zéro-coupon d'échéance  $T_\beta$ , équivalente aux échéances des taux LIBOR utilisés, est obtenu selon :

$$P(t, T_\beta) = \frac{1}{1 + L(t, T_\beta)\tau(t, T_\beta)} \quad (4.1)$$

avec  $L(t, T_\beta)$  correspondant aux taux LIBOR et  $\tau(t, T_\beta)$  la différence entre la date d'évaluation et l'échéance du taux LIBOR<sup>23</sup>.

### Moyen terme

Le segment moyen terme offre un plus grand choix d'instruments financiers. Il sera nécessaire de contraindre ces choix selon les qualités énumérées précédemment. Une première possibilité serait d'opter pour les taux LIBOR d'une échéance supérieure à 6 mois. Toutefois, il existe une certaine réticence des acteurs du marché interbancaire à prêter à plus long terme. Ce phénomène peut être expliqué par l'élargissement de l'écart acheteur-vendeur des taux LIBOR d'échéances supérieures à 6 mois. Une deuxième possibilité serait d'employer des contrats de type FRA. Cependant, les FRA ne sont pas des instruments particulièrement liquides et les cotations sont plutôt opaques. La dernière possibilité serait d'utiliser les contrats futures Eurodollar. Les contrats Eurodollars futures sont des contrats futures sur le taux LIBOR 3 mois régulés par le *Chicago Mercantile Exchange* (CME). Les contrats futures Eurodollar contrairement aux deux autres instruments présentés sont extrêmement liquides et sont offerts pour une myriade d'échéances. De plus, ils sont semblables aux FRA à l'exception d'avoir des dates d'échéances spécifiques fixées par le CME

---

23. La date d'évaluation correspond à la date de fixation des cours à laquelle on ajoute deux jours ouvrables dans la ville de Londres. Les conventions inhérentes aux taux LIBOR peuvent être consultées sur le site [www.bbalibor.com](http://www.bbalibor.com).

et d'être soumis à la règle d'évaluation au marché. Cette légère différence entre les contrats futures Eurodollar et les FRA nécessitera, afin de préserver la relation d'arbitrage inter-marché, un ajustement de convexité du prix des contrats Eurodollar. Cette technique d'ajustement de convexité sera développée plus en détail à la section 4.1.2. Pour dériver la partie moyen terme de la courbe d'obligations zéro-coupon, on utilise les 8 premiers contrats futures Eurodollar avec des dates d'échéances de  $\mathcal{T}^* = \{T_1^*, \dots, T_8^*\}$  qui correspondent aux dates IMM définies par le CME<sup>24</sup>. Aussi, on considère que l'ajustement de convexité a été préalablement effectué.

Afin de pouvoir estimer la portion de la courbe de moyen terme, on doit a priori évaluer le prix de l'obligation zéro-coupon  $P(t, T_1^*)$  venant à échéance à la date de règlement du premier contrat Eurodollar. Comme la date de règlement variera de 3 mois à 1 jour avant de rouler au prochain contrat, nous devrons interpoler cette valeur des obligations zéro-coupon déjà dérivées à la portion court terme. Nonobstant la multitude de méthodes d'interpolation offertes, nous opterons pour l'interpolation log-linéaire<sup>25</sup> qui selon Hagan et West (2005) est une méthode d'interpolation stable, aisée à implanter et qui sert empiriquement d'étalon afin de comparer les méthodes d'interpolation plus complexes. De plus, comme le démontre Hagan et West (2005) cette méthode assure une courbe de taux forward cohérente et stable pour la région interpolée.

Pour estimer la valeur des obligations zéro-coupon à partir des contrats Eurodollar, on commence par exprimer les contrats Eurodollar d'échéances  $\mathcal{T}^* = \{T_1^*, \dots, T_8^*\}$  en taux forward en inversant le prix  $PF$  des contrats Eurodollar selon la convention :

$$F(t, T_{i-1}^*, T_i^*) = \frac{100 - PF(t, T_{i-1}^*, T_i^*)}{100} \quad (4.2)$$

On applique ensuite l'algorithme itératif suivant pour obtenir la valeur de chaque obligation d'échéance  $T_\beta^*$  correspondante aux dates d'échéances IMM

24. Les contrats Eurodollar utilisés dans cette recherche sont tous fonction du cycle de mars : soit les mois de mars, juin, septembre et décembre.

25. Cette méthode est aussi nommée l'interpolation exponentielle.

$\mathcal{T}^* = \{T_1^*, \dots, T_8^*\}$  des contrats Eurodollars :

$$P(t, T_\beta^*) = \frac{P(t, T_1^*)}{\prod_{i=2}^\beta [1 + F(t, T_{i-1}^*, T_i^*)(T_i^* - T_{i-1}^*)]} \quad (4.3)$$

Donc, après les étapes de court et moyen terme on détient la valeur des obligations zéro-coupon du marché interbancaire pour des échéances de 1 jour, 1 à 3 mois et 8 dates IMM successives par tranche de 3 mois. Corollairement, on possède de l'information jusqu'à une échéance d'environ 2 ans. Cette information sera primordiale pour construire la partie long terme de la courbe.

### Long terme

Pour le segment long terme, soit les échéances supérieures à 2 ans, on se base sur la courbe des taux swaps avec des échéances de 2, 3, 4, 5, 7 et 10 ans. Le but dans cette portion est d'obtenir la valeur des obligations zéro-coupon pour chaque date de paiement de coupons du swap. Alors, on dérivera une série d'obligations zéro-coupon semestrielle pour des échéances supérieures à 2 ans. Toutefois, cette portion de la courbe complexifie sensiblement l'algorithme itératif.

De prime abord, il est populaire en pratique d'interpoler directement les taux swaps pour des échéances semestrielles et inverser la formule de valorisation d'un swap de façon itérative afin d'obtenir la valeur des obligations zéro-coupon. Or, cette méthode peut être risquée selon Hagan et West (2005), car rien n'assure la positivité des taux forward pour la portion de la courbe interpolée.

Avant de définir notre procédure, il est primordial d'introduire l'équation de valorisation d'un taux swap. Un taux swap  $S(t, T_\beta)$  d'échéance  $T_\beta$  s'évalue avec la formule :

$$S(t, T_\beta) = \frac{1 - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=1}^\beta \tau_i P(t, T_i)} \quad (4.4)$$

En manipulant l'équation (4.4), on obtient :

$$S(t, T_\beta) \sum_{i=1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) + P(t, T_\beta) = 1 \quad (4.5)$$

La procédure utilisée dans cette recherche consiste à incorporer itérativement l'information des taux swap au pair pour obtenir une série d'obligations zéro-coupon semestrielles correspondantes aux dates de paiement de coupon des swaps. Par contre, la procédure itérative nous confronte à un problème sous-déterminé. En effet, supposons que l'on veut incorporer l'information de  $S(t, T_\beta)$  à notre courbe. La méthode choisie étant itérative, l'information dérivée jusqu'à  $T_\alpha$  est connue. L'équation (4.5) se transforme en soustrayant l'information connue de chaque côté de l'équation selon :

$$S(t, T_\beta) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) + P(t, T_\beta) = 1 - S(t, T_\beta) \sum_{i=1}^{\alpha} \tau_i P(t, T_i) \quad (4.6)$$

L'équation (4.6) est en général un système sous-déterminé. Le terme de droite dans l'équation (4.6) est connu, mais le terme de gauche peut prendre une infinité de valeurs. On doit donc postuler une structure pour la forme des obligations zéro-coupon inconnues. La première solution suppose une structure de taux forward constante entre les dates de paiement de coupons résiduelles. Cette méthode entraînera une courbe à palier et ne donnera donc pas une courbe de taux forward continue en tout point, ce qui est un inconvénient majeur. La deuxième option est de supposer une structure linéaire. Toutefois, cette méthode est prédisposée à des instabilités comme démontré par Malz (2002). La troisième option, celle utilisée dans cette recherche, suppose une structure quadratique des taux forward, soit  $f(t) = a + bt + ct^2$ . Ainsi, les obligations zéro-coupon inconnues, dans le terme de gauche de l'équation (4.6), seront déterminées par la relation récursive :

$$P(t, T_{i+1}) = \frac{P(t, T_i)}{1 + a + bT_i + cT_i^2} \quad (4.7)$$

Les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont choisis judicieusement pour assurer l'absence

d'arbitrage avec les taux swaps observés et assurer que chaque extrémité des segments correspond à celle des segments voisins.

Plus précisément, on débute par appliquer la structure de taux forward constante pour obtenir des taux forward préliminaires. Ces taux forward préliminaires permettront d'établir des contraintes lors de l'estimation de la forme quadratique. En effet, on considère que pour la limite de gauche d'un segment quelconque, le taux forward devra se situer entre le taux forward préliminaire constant de la période précédente et le taux forward préliminaire constant de la période actuelle. On applique cette même contrainte pour la limite de droite. Ainsi avec ces deux taux forward aux limites du segment, on peut déterminer les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  en exigeant que le segment quadratique passe par les deux points limites et qu'en plus le taux swap estimé des taux forward quadratique soit égal au taux swap observé sur le marché. Bref, la méthode quadratique lisse la courbe des taux forward constante estimée et permet d'éliminer les discontinuités tout en assurant l'absence d'arbitrage avec les taux swaps utilisés dans la construction de la courbe d'obligations zéro-coupon.

#### 4.1.2 Ajustments de la courbe d'obligations zéro-coupon

La procédure itérative intègre les éléments un à un de façon séquentielle. Comme on a préalablement mentionné, cette méthode récupère de façon exacte le prix des instruments financiers utilisés dans sa construction. Néanmoins, il sera essentiel de faire des ajustements aux contrats futures Eurodollar afin d'assurer l'absence d'arbitrage inter-marché.

##### Convexité

Nous avons mentionné précédemment que les contrats futures Eurodollar sont un meilleur choix que les FRA dus à leur grande liquidité. Néanmoins, la présence de deux facteurs institutionnels supplémentaires forcera l'ajustement du prix des contrats Eurodollars.

Tout d'abord, les contrats Eurodollar sont réévalués quotidiennement au prix courant du marché selon les règles du CME, ce qui engendre une corrélation négative entre les taux d'intérêt et la fonction de profit d'un investisseur. Précisément, supposons un investisseur détenant une position longue dans un contrat Eurodollar. Si les taux d'intérêt augmentent, le prix du contrat diminuera et l'investisseur devra ajouter de l'argent dans son compte sur marge plutôt que de pouvoir l'investir à un taux d'intérêt plus élevé. Au contraire, si les taux d'intérêt diminuent, le prix du contrat augmentera et l'investisseur retirera de l'argent de son compte sur marge et l'investira à un taux d'intérêt plus faible. L'investisseur devrait donc exiger un prix moins élevé pour le contrat Eurodollar afin d'être compensé pour ces caractéristiques qui ne sont pas présentes pour un investisseur long FRA<sup>26</sup>. Par conséquent, les taux calculés à partir des contrats Eurodollar sont donc plus élevés que les taux forward correspondants.

Ensuite, les spécifications du contrat Eurodollar définies par le CME impliquent un gain ou une perte de 25 \$ par changement d'un point de base du taux futures Eurodollar. Cette construction prive le contrat Eurodollar de la convexité généralement observée par les titres à revenus fixes. En effet, la valeur d'un FRA augmentera beaucoup plus pour une baisse des taux d'intérêt qu'elle diminuerait pour une hausse identique des taux d'intérêt. L'effet cumulé des deux facteurs est appelé biais de convexité<sup>27</sup> et il est donc nécessaire d'ajuster le prix des contrats Eurodollar afin d'assurer l'absence d'arbitrage inter-marché.

La méthode d'ajustement de la convexité la plus répandue selon Jäckel et Kawai (2005) est la formule dérivée par Kirikos et Novak (1997). Jäckel et Kawai (2005) affirment que cette méthode est universellement employée en pratique pour dériver la courbe d'obligation zéro-coupon. Dès lors, nous emploierons cette formule.

À partir du modèle à un facteur de Hull et White (1990) à paramètres constants, Kirikos et Novak (1997) définissent le taux d'intérêt forward  $F$ ,

---

26. Il n'y a aucun flux monétaire intermédiaire échangé dans un contrat FRA.

27. Cet effet a été intitulé par Burghardt et Hoskins (1994).

s'appliquant de  $T_\alpha$  à  $T_\beta$ , ajusté pour la convexité selon :

$$F(0; T_\alpha, T_\beta) = 100 \left[ 1 - \frac{360}{\tau(T_\alpha, T_\beta)} \left( \frac{P(0, T_\alpha)}{P(0, T_\beta)} e^Z - 1 \right) \right] \quad (4.8)$$

où, avec  $a$  représentant le coefficient de retour à la moyenne et  $\sigma$  le paramètre de volatilité,

$$\begin{aligned} Z &= \Lambda + \Phi \\ \Lambda &= \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2aT_\alpha}}{2a} \right) \left[ \frac{1 - e^{-a(T_\beta - T_\alpha)}}{a} \right]^2 \\ \Phi &= \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{1 - e^{-a(T_\beta - T_\alpha)}}{a} \right) \left[ \frac{1 - e^{-aT_\alpha}}{a} \right]^2 \end{aligned}$$

Toutefois, l'utilisation de cette méthode engendre une difficulté supplémentaire. En effet, il est nécessaire d'avoir une courbe d'obligations zéro-coupon pour estimer l'ajustement de convexité. Pourtant, l'ajustement de convexité est nécessaire pour dériver la courbe d'obligations zéro-coupon. Kirikos et Novak (1997) proposent donc d'estimer simultanément le biais de convexité et la courbe d'obligation zéro-coupon. Pour ce faire, nous calibrerons le modèle de Hull et White (1990), implanté par un arbre trinomial selon la procédure illustrer dans Hull et White (2001), sur le prix des swaptions pour obtenir les paramètres de volatilité  $\sigma$  et de retour à la moyenne  $a$ . Afin de ne pas rendre la calibration numériquement exigeante, la calibration s'effectue uniquement sur les swaptions court terme, soit d'une échéance de deux ans et moins. Ce choix est motivé par l'horizon temporel des contrats Eurodollar. Un des avantages de cette procédure est que l'obtention d'un ajustement de convexité reflétant les vues actuelles du marché en regard de la volatilité. Finalement, lors de la calibration, il est primordial d'ajouter une contrainte d'absence d'arbitrage avec les taux swaps 1 et 2 ans, car les taux swap et les taux forward sont supposés être directement cohérent avec la propriété d'absence d'arbitrage.



### Écart et chevauchement des contrats Eurodollars

Nous avons supposé jusqu'à présent que les contrats Eurodollars s'imbriquaient les uns aux autres sans problème. La réalité est plus complexe. Selon les spécifications officielles<sup>28</sup> du contrat Eurodollar, ce dernier couvre une période débutante le troisième mercredi du mois de livraison et se termine 3 mois plus tard. De cette façon, d'après le calendrier, il y aura donc des écarts ou des chevauchements entre les périodes adjacentes. Par exemple, pour le contrat de décembre 2005 se terminant le 21 mars 2006 on a un chevauchement de 7 jours avec le contrat de mars 2006 débutant le 15 mars 2006. En raison de ses disparités, il est essentiel d'ajuster les taux forward sous-jacents s'appliquant à ces périodes pour ne pas causer de distorsion dans le prix des contrats Eurodollar. Conséquemment, en présence d'un écart entre deux contrats adjacents, on allonge simplement la période effective du premier contrat jusqu'au commencement de la période effective du deuxième contrat. En cas de chevauchement entre deux contrats adjacents, on applique l'ajustement suivant :

$$\Delta f \approx \frac{n}{90}(F_s - F_p) \quad (4.9)$$

avec  $F_s$  et  $F_p$  représentant respectivement le taux forward suivant et précédent et  $n$  représentant le nombre de jours de chevauchement. Cette correction s'applique au taux forward  $F_p$  inférer du contrat Eurodollar précédent. L'ampleur de cette correction variera selon la pente de la courbe d'obligation zéro-coupon. En effet, la correction sera négligeable en présence d'une pente presque nulle, mais pourra être appréciable en présence d'une pente abrupte. On spécifie que cet ajustement fût développé par Zhou (2002) pour la banque *Lehman Brothers Holdings Inc.* Selon notre recensement de la littérature, l'article de Zhou (2002) est le seul traitant du phénomène de l'écart et du chevauchement des contrats Eurodollars. La correction développée dans l'article devient donc de facto l'unique correction que l'on puisse justifiée théoriquement.

---

28. Les spécifications peuvent être obtenue de Labuszewski et Co (2010).

### 4.1.3 Analyse et Résultats

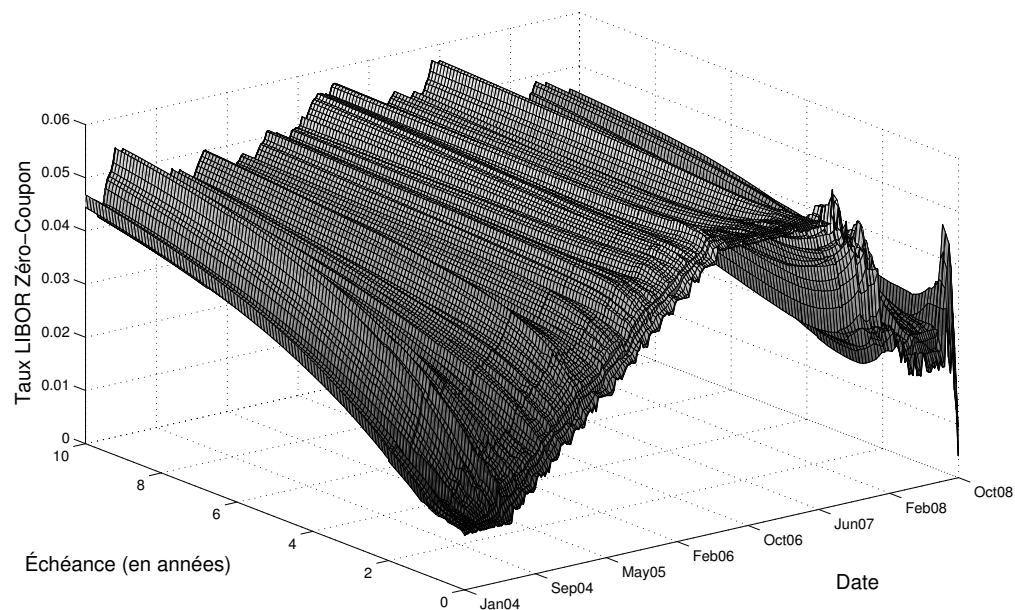
De façon à juger la qualité de la méthodologie développée pour estimer la courbe d'obligations zéro-coupon, nous avons testé notre procédure sur notre base de données. Nous rappellerons que notre base de données est composée d'observations hebdomadaires (journée du vendredi) des taux LIBOR au jour le jour, 1 à 3 mois, des 8 premiers contrats Eurodollars et des taux swaps au pair d'une échéance de 1 à 5 ans, 7 ans et 10 ans. Notre période d'analyse s'échelonne du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008.

Les structures à terme des taux LIBOR zéro-coupon pour la période s'échelonnant du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008 sont représentées à la Figure 4.1. On observe que les structures à terme des taux LIBOR zéro-coupon exhibent, au début de notre échantillon, une forme assez standard de structure à terme des taux, soit une courbe croissante avec des taux long terme plus élevés que les taux court terme. Cependant, au fil du temps on remarque une augmentation des taux à court terme, qui jumelé avec une certaine stabilité des taux à long terme, amène un aplatissement de la structure à terme des taux LIBOR zéro-coupon. Ainsi, durant le deuxième tiers de notre échantillon on constate une courbe relativement plane. Par la suite, il y aura un inversement de la courbe. Cette situation implique que les taux à long terme sont inférieurs aux taux à court terme. Il est intéressant de constater que l'inversement de la structure à terme des taux sert généralement aux économistes<sup>29</sup> comme un indicateur avancé pour tenter de prédire les récessions. Ainsi, on peut spéculer sur le rôle prépondérant que l'inversement de la structure à terme des taux a eu sur la disponibilité du crédit à court terme et à sans doute exacerbée l'impact des facteurs à l'origine de la crise financière de 2008. Le Tableau 4.1 présente les statistiques sommaires des taux LIBOR zéro-coupon pour les échéances 6 mois, 1, 2, 5, 7 et 10 ans.

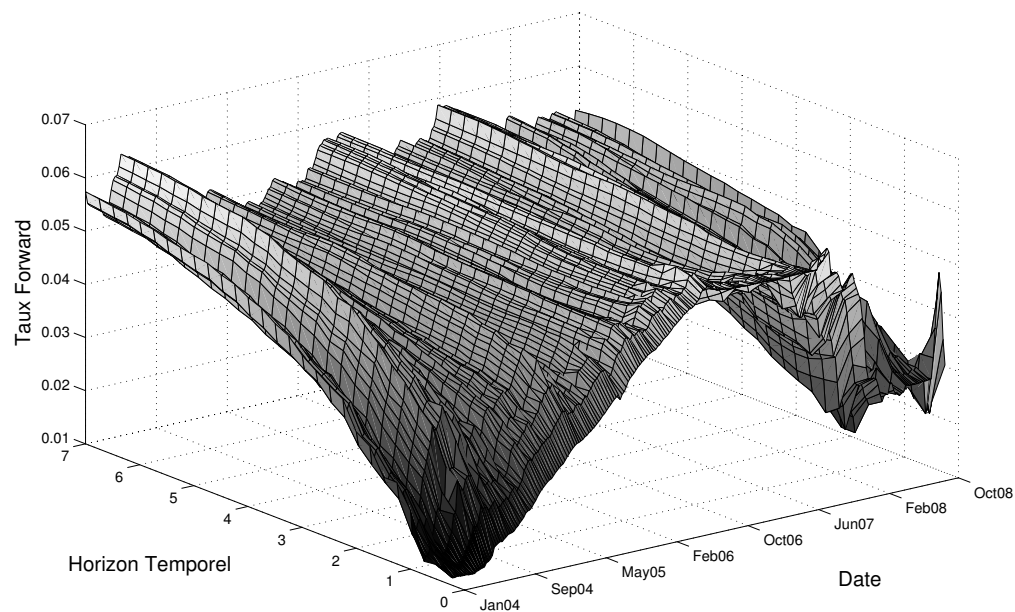
Le Panel C du Tableau 4.1 présente les résultats d'une analyse en composante principale appliquée aux taux LIBOR zéro-coupon de notre échantillon.

---

29. On réfère aux articles de Estrella et Hardouvelis (1991), Estrella et Mishkin (1996) et Estrella et Trubin (2006) pour plus de détails.



(a) Taux LIBOR zéro-coupon



(b) Taux forward 3 mois

**FIGURE 4.1 – Structure à terme des taux LIBOR zéro-Coupon et taux forward 3 mois.**

Cette figure contient la structure à terme des taux LIBOR zéro-coupon et des taux forward pour la période s'échelonnant du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008. La structure à terme est construite selon la procédure évoquée à la section 4.1.1 avec les taux LIBOR au jour le jour, 1 à 3 et 6 mois, les 8 premiers contrats Eurodollars et les taux swaps 2 à 5 ans, 7 et 10 ans.

Tableau 4.1

**Information Sommaires des Taux LIBOR Zéro-Coupon**

Ce tableau présente les statistiques descriptives et une analyse en composante principale des niveaux et des changements des taux LIBOR zéro-coupon, qui sont construits avec la méthode développée à la section 4.1.1. La période d'analyse s'étend du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008, pour un échantillon de 252 semaines.

	Échéance (en années)					
	0.5	1	2	5	7	10
Panel A : Statistiques descriptives des niveaux des taux LIBOR zéro-coupon						
Moyenne (%)	3.798	3.833	3.977	4.415	4.619	4.839
Écart-Type (%)	1.388	1.263	1.018	0.612	0.481	0.381
Asymétrie	-0.351	-0.345	-0.326	-0.116	0.052	0.184
Coefficient d'aplatissement	1.790	1.822	1.886	2.038	2.123	2.251
Autocorrélation partielle d'ordre un	0.992	0.992	0.990	0.982	0.976	0.969
Panel B : Statistiques descriptives des changements dans les taux LIBOR zéro-coupon						
Moyenne (%)	0.006	0.004	0.002	0.000	-0.000	-0.002
Écart-Type (%)	0.093	0.093	0.110	0.113	0.107	0.101
Asymétrie	-1.868	-0.586	0.032	0.124	0.090	0.061
Coefficient d'aplatissement	14.01	9.266	5.309	4.248	4.271	4.131
Autocorrélation partielle d'ordre un	0.378	0.346	0.201	0.135	0.130	0.133
Panel C : Analyse en composante principale des niveaux et des changements des taux LIBOR zéro-coupon						
	Facteur					
	1	2	3	4	5	6
Niveau	95.10%	4.159%	0.705%	0.030%	0.008%	0.000%
Changement	81.93%	12.54%	4.826%	0.519%	0.144%	0.043%

Nous remarquons que les trois premiers facteurs expliquent plus de 99% des changements dans la structure à terme des taux LIBOR zéro-coupon. Les résultats de notre analyse en composante principale sont cohérents avec la littérature empirique existante<sup>30</sup>. Les trois principaux facteurs, aisément identifiables en traçant la sensibilité absolue des taux LIBOR zéro-coupon à chacun des facteurs, permettent de mettre en évidence un facteur de niveau, un facteur de rotation et un facteur de courbure. En effet, la Figure 4.2 illustre que le premier facteur à un effet presque qu'identique peut importe l'échéance de taux. On note uniquement une légère différence entre l'effet sur les taux à court terme et les taux à moyen et long terme, mais on peut tout de même interpréter l'effet du premier facteur comme provoquant des déformations parallèles de la structure à terme. Le deuxième facteur apporte un effet contraire aux taux à court

30. Pour une revue exhaustive de résultats d'analyse en composante principale, on réfère à (Martellini et al., 2003, p.74-76)

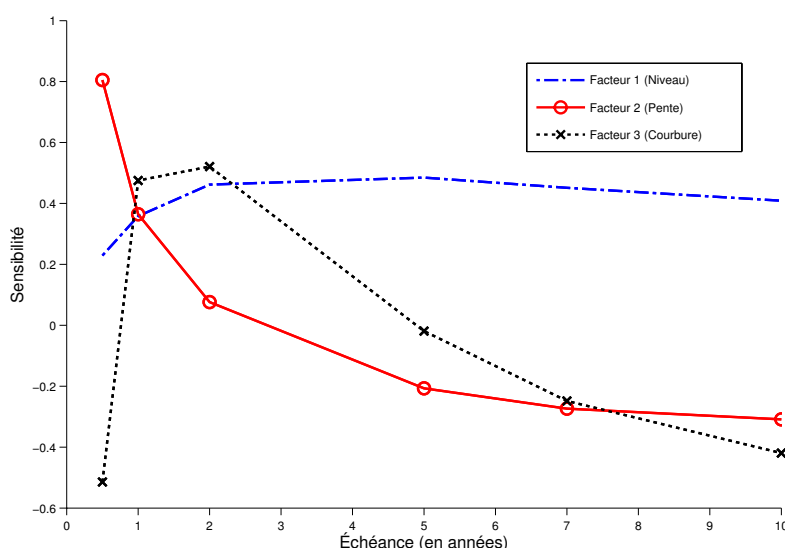


FIGURE 4.2 – Analyse en composantes principales des taux LIBOR zéro-coupon.

Cette figure montre le résultat de l'analyse en composantes principales effectuée pour le Panel C du Tableau 4.1.

terme et à ceux de long terme. Le deuxième facteur peut donc être interprété comme provoquant des déformations d'aplatissement ou de pentification de la structure à terme. Le troisième facteur a un effet similaire aux extrémités, soit les taux à court et long terme, mais un effet sur la portion intermédiaire de signe contraire provoquant donc des changements de concavité de la structure à terme.

Ainsi, les résultats de l'analyse en composante principale sur notre échantillon nous amènent à constater qu'un modèle de deux à trois facteurs peut amplement suffire à expliquer l'évolution de la structure à terme des taux. Cependant, comme nous avons mentionné au chapitre 2 certains auteurs, entre autres Li et Zhao (2006), Collin-Dufresne et Goldstein (2002), et Heidari et Wu (2003), ont récemment déterminés que le marché des dérivés sur taux d'intérêt ne peut être expliqué seulement par ces trois mêmes facteurs et que possiblement il existe des facteurs associés à la volatilité non identifiable par les méthodes d'analyse en composante principale qui influencent le prix des dérivés sur taux d'intérêt. Il sera donc intéressant de découvrir si les modèles utilisés dans cette recherche seront en mesure de tarifier et de couvrir convenablement

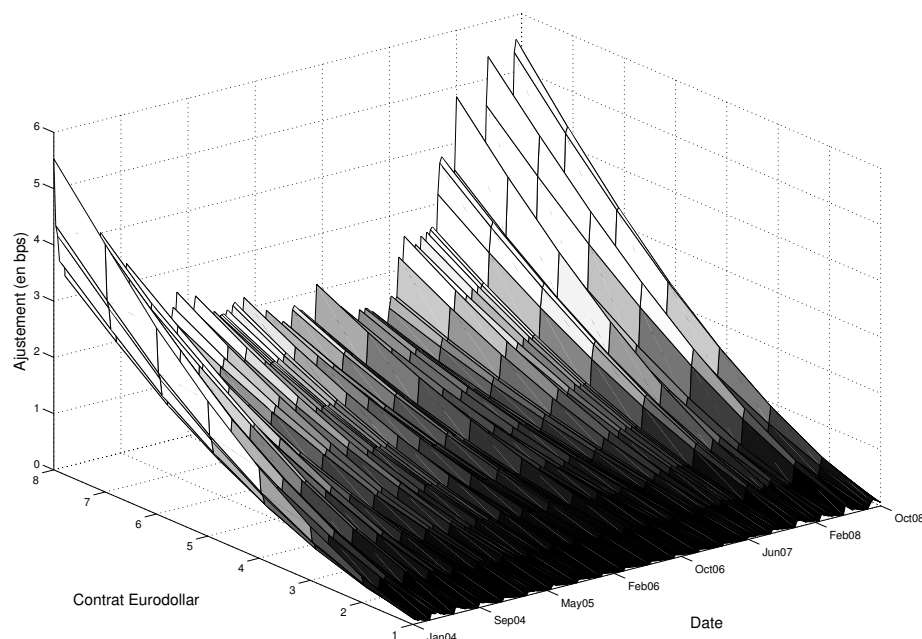


FIGURE 4.3 – Ajustement du biais de convexité des 8 premiers contrats Eurodollars.

Cette figure montre l'importance de l'ajustement de convexité pour les 8 premiers contrats Eurodollars utilisé dans la procédure décrite à la section 4.1.1. La période d'analyse s'échelonne du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008.

les options de type caps.

Finalement, la Figure 4.3 montre les résultats rattachés à notre procédure d'ajustement de la convexité des taux Eurodollar futures. Conformément à la théorie, l'ajustement de convexité est croissant avec l'échéance du contrat. De plus, les périodes de convexité élevée correspondent aux périodes de volatilités élevées des caps dans notre échantillon, ce qui est logique étant donné la calibration aux cotations swaptions. Ainsi, on remarque la finesse de notre procédure qui inclut la prime de risque associée à la volatilité transigée le jour même. On mentionne que l'ajustement de convexité moyen pour notre échantillon est de l'ordre de 1 point de base par contrat.

## 4.2 Structure à terme des volatilités

La calibration des modèles introduits au chapitre 3 s'effectue sur les volatilités caplets. Toutefois, les volatilités caplets ne sont pas observables sur les marchés financiers. Il faudra donc les estimer de façon cohérente et évidemment sans arbitrage. Cependant, le marché cote uniquement les volatilités des caps qui sont des portefeuilles de caplets. Ainsi, il faudra extraire l'information propre à chaque caplet des cotations de caps. Ce procédé se nomme l'extraction des volatilités caplet ou plus communément appelé dans le marché *volatility bootstrapping*. On obtiendra ainsi la structure à terme des volatilités, lesquelles représentent les volatilités individuelles de chaque caplet, mais aussi la volatilité du taux forward correspondant.

Plus formellement, supposons un cap d'échéance  $T_\beta$  avec une volatilité cotée  $\sigma_{Cap}$  portant sur un taux d'exercice  $K$ . Comme nous avons indiqué au chapitre 2, le prix de ce cap est seulement la somme des caplets individuels auxquels nous appliquons la volatilité du cap.

$$Cap(\sigma_{Cap}, K, T_\beta) = \sum_{i=2}^{\beta} Caplet_i(\sigma_{Cap}, K, T_i) \quad (4.10)$$

Par contre, nous désirons obtenir les volatilités individuelles  $\sigma_{Caplet}^i$  de chaque caplet selon :

$$Cap(\sigma_{Cap}, K, T_\beta) = \sum_{i=2}^{\beta} Caplet_i(\sigma_{Caplet}^i, K, T_i) \quad (4.11)$$

La littérature propose peu de solutions pour résoudre ce problème. Une première approche, proposée par Hull et White (2000), particulièrement populaire en pratique, suggère de venir compléter l'information disponible en interpolant la volatilité implicite des caps cotés pour ainsi obtenir une série de cotations d'échéances trimestrielles. Dès lors, il est possible d'obtenir la volatilité individuelle des caplets chaque trimestre en effectuant une différence des caps d'échéances adjacentes et par la suite inverser numériquement la formule de

Black (1976). Malgré la popularité et la simplicité d'implantation, une lacune importante nous fait hésiter à utiliser cette méthode. En effet, la structure à terme des volatilités sera entièrement dépendante de la méthode d'interpolation choisie. Il existera donc une différence entre le prix des caplets interpolés si par exemple nous utilisons une interpolation de type linéaire ou cubique. Ainsi, rien n'assurera que la méthode d'interpolation employée préservera la relation d'absence d'arbitrage.

Une deuxième approche proposée par Hull (2005)[chap.29] se base sur l'additivité des variances des caplets. Dans les marchés où les options sont gouvernés par un actif unique dont la dynamique suit un mouvement brownien géométrique standard, la variance du logarithme des rendements pour une période  $T = T_1 + T_2$  est équivalente à la somme de la variance du logarithme des rendements pour la période  $T_1$  et de la variance du logarithme des rendements pour la période  $T_2$ . Comme l'explique Hull (2005)[chap.29], l'additivité des variances émane de l'indépendance des incréments dans le processus stochastiques d'un sous-jacent unique et permet donc de dériver une structure à terme des volatilités. Ainsi, en posant  $\Sigma_\beta$  correspondant à la volatilité d'un cap d'échéance  $T_\beta$  et en posant l'hypothèse que les volatilités des caplets  $\sigma$  dépendent uniquement du temps à échéance, Hull (2005) obtient l'équation suivante :

$$\Sigma_\beta^2 T_\beta = \sum_{i=1}^{\beta} \sigma_{\beta-i}^2 \tau_{i-1} \quad (4.12)$$

L'équation (4.12) peut être résolue de façon itérative afin d'extraire les volatilités caplets  $\sigma$  des cotations de caps  $\Sigma$ . Cependant, Alexander (2003, 2008) expose les problèmes théoriques et numériques de l'utilisation d'une telle méthode. En effet, l'additivité des variances peut être appliquée si les incréments dans le processus stochastique sont indépendants. Alexander (2003, 2008) démontre que pour un cap il n'existe pas de processus stochastique unique pour le sous-jacent. En effet, le forward sous-jacent change pour chaque caplet composant le cap et il devient donc impossible de justifier cette méthode de façon théorique. De plus, Alexander (2003, 2008) illustre numériquement l'instabilité de cette méthode. En effet, il n'est pas rare que dans la portion long terme,



l'équation réursive (4.12) génère des volatilités négatives ce qui est empiriquement impossible. Donc, tant du point de vue théorique que du numérique l'utilisation d'une telle méthode semble vouée à l'échec. De plus, des tests numériques (non rapportés) effectués sur notre échantillon permettent de corroborer les résultats de Alexander (2003, 2008).

L'incohérence de la méthode de Hull (2005) pousse Alexander (2003, 2008) à proposer une méthode réursive du type (4.12), mais en ajoutant une pondération par le vega de chaque caplet. La prémisse du raisonnement d'Alexander (2003, 2008) se base sur une expansion de Taylor d'ordre un, autour de  $\sigma$ , du prix d'un caplet dans l'équation (4.11) pour obtenir :

$$Caplet_i(\sigma_{Caplet}^i, K, T_i) \approx Caplet_i(\sigma_{Cap}, K, T_i) + (\sigma_{Caplet}^i - \sigma_{Cap})v_i(\sigma_{Cap}) \quad (4.13)$$

où  $v_i = \frac{\partial Caplet_i}{\partial \sigma_{Caplet}^i}(\sigma_{Cap})$  correspond au vega du  $Caplet_i$  évalué à  $\sigma_{Caplet}^i = \sigma_{Cap}$ . Cette expression combinée aux équation (4.10) et (4.11) donne :

$$\sum_{i=2}^{\beta} Caplet_i(\sigma_{Cap}, K, T_i) = \sum_{i=2}^{\beta} Caplet_i(\sigma_{Cap}, K, T_i) + (\sigma_{Caplet}^i - \sigma_{Cap})v_i(\sigma_{Cap}) \quad (4.14)$$

En isolant, Alexander (2003, 2008) obtient :

$$\sigma_{Cap} = \frac{\sum_{i=2}^{\beta} \sigma_{Caplet}^i v_i}{\sum_{i=2}^{\beta} v_i} \quad (4.15)$$

Ainsi, Alexander (2003, 2008) démontre que la volatilité d'un cap est approximativement égale à la somme des volatilités individuelles des caplets, composant le cap, pondérées par leur vega respectif. Cette méthode permet de lisser la partie long terme de la courbe et ainsi éliminer le désagrément des volatilités négatives. Malgré tout, l'équation (4.15) n'assure pas l'absence d'arbitrage entre le prix des caplets et celui des caps. De plus, l'équation (4.15) n'est réursive que si les cotations de caps sont disponibles pour toutes les échéances. Ainsi, nous retrouvons le même désagrément que la première méthode, soit une dépendance totale de structure à terme des volatilités du choix d'interpolation. Nonobstant l'attrait d'une telle méthode, elle ne convient pas à notre type de

recherche.

Finalement, Hagan et Konikov (2004), qui est selon nos recherches le seul papier traitant uniquement de l'extraction des volatilités caplet, développent plusieurs méthodes d'extraction de volatilités caplet pour la plateforme Bloomberg. Nous ne discuterons pas de toutes ces méthodes, mais nous discuterons uniquement de celle qui nous semble la meilleure pour des raisons que nous expliquerons subséquemment.

Hagan et Konikov (2004) supposent une séquence de volatilités de cap  $\sigma_{Cap}^i = \{\sigma_{Cap}^1, \dots, \sigma_{Cap}^n\}$  pour un taux d'exercice  $K$  et une séquence de volatilités caplet  $\sigma_i = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  que l'on essaie d'estimer. Au départ, il procède de la même façon que Hull et White (2000), soit la tarification des caps à partir des volatilités implicites  $\sigma_{Cap}^i$  et le calcul des différences de caps adjacents. Les différences de caps, contrairement à la méthode de Hull et White (2000) qui venait compléter l'information disponible en interpolant, ne sont pas disponibles pour toutes les échéances et donc Hagan et Konikov (2004) posent une forme fonctionnelle pour les caplets. Ce problème est identique à celui des taux swaps rencontré lors de la dérivation de la courbe zéro-coupon à long terme.

Ainsi, Hagan et Konikov (2004) proposent plusieurs formes, dont constante ou linéaire. On s'attardera uniquement à la méthode quadratique, car elle permet d'obtenir une surface de volatilités continue en tout point. La paramétrisation d'une fonction quadratique nécessite trois points sur chaque intervalle. Hagan et Konikov (2004) conseillent d'utiliser les deux extrémités d'un segment en plus du point milieu. Le choix des extrémités est nécessaire pour assurer la continuité de la fonction. Le point milieu est utilisé pour évaluer les deux pentes sur chaque intervalle : une entre la limite de gauche et le point milieu et une entre le point milieu et la limite de droite.

Alors les volatilités suivront les équations quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sigma_{i-1} + C_1(T_i - T_{i-1}) + C_2(T_i - T_{i-1})^2 \\ \sigma_m &= \sigma_{i-1} + \frac{1}{2}C_1(T_i - T_{i-1}) + \frac{1}{4}C_2(T_i - T_{i-1})^2\end{aligned}\quad (4.16)$$

avec  $\sigma_m$  la volatilité milieu. Hagan et Konikov (2004) obtiennent les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  selon :

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{2(\sigma_i - \sigma_{i-1}) - 4(\sigma_m - \sigma_{i-1})}{(T_i - T_{i-1})^2} \\ C_1 &= \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{T_i - T_{i-1}} - C_2(T_i - T_{i-1}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Les paramètres de la calibration correspondront à :

$$f = \{\sigma_0, \sigma_{1m}, \sigma_1, \sigma_{2m}, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_{nm}, \sigma_n\}$$

et par conséquent la fonction de minimisation sera définie telle que :

$$\begin{aligned} F(f) &= \sum_{i=1}^n w_i \left( ForwardCap_{[T_{i-1}, T_i]}^K(K, \sigma_{Cap}^i) - ForwardCap_{[T_{i-1}, T_i]}^K(K, f) \right)^2 \\ &+ \lambda \sum_{i=1}^{2N-1} (\beta_{i-1} - \beta_i)^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

où

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{\sigma_{km} - \sigma_{k-1}}{T_{km} - T_{k-1}}, & i=2k \\ \frac{\sigma_k - \sigma_{km}}{T_k - T_{km}}, & i=2k+1 \end{cases}$$

avec  $T_{km} = \frac{T_k + T_{k-1}}{2}$  qui représente l'indice de temps du point milieu. De plus, le terme  $ForwardCap_{[T_{i-1}, T_i]}$  correspond à la différence de deux caps adjacents,  $\beta_i$  représente une des deux pentes que prend la fonction quadratique sur l'intervalle  $[T_{i-1}, T_i]$ ,  $w_i$  est une fonction de différents poids utilisée dans la minimisation et  $\lambda$  représente un paramètre permettant de lisser la courbe au détriment d'une précision moindre. Hagan et Konikov (2004) suggèrent de prendre les poids  $w_i$  égaux à  $\frac{1}{T_i}$  et  $\lambda = 1^{-4}$  pour ne pas perdre trop de précision. Dans cette recherche, on applique cette procédure avec les suggestions proposées par Hagan et Konikov (2004).

La différence fondamentale entre la méthode de Hagan et Konikov (2004) et les autres méthodes présentées réside dans le fait que, tout comme dans le cas des taux swaps, l'on n'interpole pas entre les volatilités caps, mais plutôt

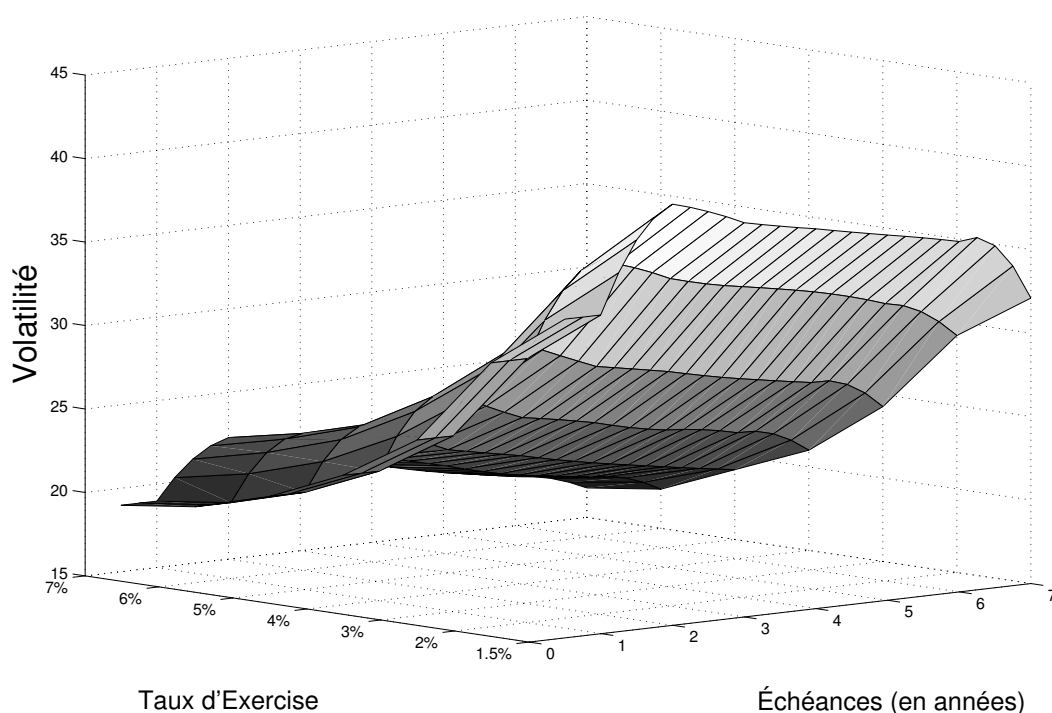


FIGURE 4.4 – Volatilités implicites moyennes des caplets

Cette figure montre la surface moyenne des volatilités implicites obtenues grâce à la méthode décrite à la section 4.2. La période d'analyse s'échelonne du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008.

entre les volatilités caplets. On s'assure ainsi que les prix des caps estimés à partir des volatilités caplets seront égaux à ceux observés sur le marché et donc sans opportunité d'arbitrage, une caractéristique qui n'était pas présente dans les autres méthodes.

### 4.2.1 Analyse et Résultats

Dans cette section, on montre les résultats obtenus en appliquant l'algorithme développé par Hagan et Konikov (2004). La Figure 4.4 présente les volatilités implicites moyennes des caplets pour la période d'analyse, soit du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008. On constate une bosse, conformément à ce que l'on observe empiriquement, dans les volatilités implicites aux environs de l'échéance de 2 ans. De plus, la figure 4.4 permet d'apprécier la finesse de la procédure utilisée. En effet, on obtient une surface lisse et sans discontinuité.

## 4.3 Calibration des modèles

Dans cette section, on présente les différentes procédures intrinsèques à la calibration des différents modèles introduits au chapitre 3. Tout d'abord, on définit une fonction de minimisation qui sera utilisée pour la calibration de tous les modèles. Ensuite, les caractéristiques des calibrations propres à chaque modèle seront décrites.

### 4.3.1 Fonction de minimisation

La fonction d'optimisation choisie est primordiale puisqu'elle influencera les paramètres estimés des modèles et conséquemment les tests empiriques de tarification et de couverture. Son choix se doit donc d'être réfléchi. De prime abord, la calibration s'effectue sur le prix des caplets et non sur leurs volatilités. D'ailleurs, Rebonato (2004) argue qu'effectuer la calibration sur les volatilités implicites peut être risquée et surtout plus lente, car elle nécessite pour chaque évaluation de caplets l'inversement numérique de la formule de Black (1976). De plus, on se doit de considérer la nature de notre échantillon, qui est composée d'une multitude de taux d'exercice et d'échéances. Alors, la fonction de minimisation est la somme des erreurs en pourcentage aux carrés (SSE) définie telle que :

$$F(x) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left( \frac{Caplet^{model}(T_i, K_j; x) - Caplet^{Mkt}(T_i, K_j)}{Caplet^{Mkt}(T_i, K_j)} \right)^2 \quad (4.19)$$

où  $Caplet^{model}$  est le prix d'un caplet évalué avec les paramètres estimés  $x$  d'un des modèles présentés au chapitre 3 et  $Caplet^{Mkt}$  est le prix d'un caplet observé sur le marché. Les variables  $M$  et  $N$  représentent respectivement le nombre d'échéances de caplet et le nombre de taux d'exercice. Cette fonction de minimisation permet d'éviter lors de la calibration d'allouer une pondération trop grande (faible) aux caplets de taux d'exercice vraiment dans la monnaie (hors de la monnaie). En outre, les études empiriques antérieures, telles que Longstaff et al. (2001), Fan et al. (2003), Li et Zhao (2006), Jarrow et al.

(2007), ont toutes eu recours à cette mesure.

Évidemment, le choix de cette mesure comporte un désavantage majeur. En effet, la somme des erreurs en pourcentage aux carrées surpondérera les valeurs aberrantes. Ce phénomène est le résultat direct d'élevé au carré les erreurs ce qui affectent donc les erreurs d'une magnitude plus importantes. Les erreurs plus importantes proviendront surtout des caps hors jeu de courts termes, car leur prix sont généralement bien moindre que les caps ATM ou en jeu.

### Procédure numérique

Le problème d'optimisation de la fonction (4.19) en est un hautement non linéaire. En effet, la calibration s'effectue sur une surface de volatilité entière et il est très probable que la fonction possède plusieurs minima locaux. Notre méthode numérique se doit donc d'être adaptée à ce type de problème d'optimisation pour obtenir des résultats cohérents.

La procédure se voudra donc des plus rigoureuses et sera calquée sur celle utilisée par Brigo et Mercurio (2006). Ainsi, la minimisation s'effectue avec une méthode de recuit simulé<sup>31</sup> suivie d'un algorithme local pour raffiner la dernière solution trouvée. En effectuant une minimisation globale suivie d'une minimisation locale, on maximise nos chances d'obtenir le minimum global de la fonction (4.19). Par contre, le défaut majeur d'une telle méthode d'optimisation est le temps que nécessite la méthode de recuit simulé. Notre recherche ne nécessitant pas une optimisation rapide pour coter ou couvrir des options, on peut se permettre cette méthode plus exigeante.

#### 4.3.2 Calibration du modèle SABR

La calibration du modèle SABR est unique comparativement à celle des autres modèles présentés dans les sections subséquentes. En effet, le modèle

---

31. Plus usuellement appelé *simulated annealing*. Précisément, on utilise la fonction ASAMIN fournie par Lester Ingber et disponible au <http://www.ingber.com/>

SABR ne modélise qu'un taux forward et doit donc être calibré pour chaque échéance de caplet dans notre échantillon. Le modèle SABR compte 4 paramètres, soit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\rho$  et  $\nu$ . Comme l'affirme Hagan et al. (2002) et West (2005), les paramètres  $\beta$  et  $\rho$  affectent le *smile* de façon analogue. Ils causent une pente négative due *skew* par rapport à une variation du taux d'exercice. Dès lors, il devient difficile de distinguer l'apport des deux paramètres. Hagan et al. (2002) proposent donc de fixer le paramètre  $\beta$ . En fixant le paramètre  $\beta$ , les autres paramètres gagnent en intuition. En effet, le paramètre  $\alpha$  contrôlera le niveau du *smile*, le paramètre  $\rho$  s'occupera du *skew* et  $\nu$ , qui représente la volatilité de la volatilité, gouvernera la courbure du *smile*. Hagan et al. (2002) arguent que l'effet distinct de chaque paramètre permet d'obtenir une meilleure stabilité des paramètres estimés. Hagan et al. (2002) suggèrent simplement de fixer a priori le coefficient  $\beta$  ou de l'estimer à partir d'observations historiques. Plus précisément, le coefficient  $\beta$  peut être estimé à partir d'une régression linéaire du logarithme des taux d'exercice ATM et du logarithme des volatilités implicites ATM. Par ailleurs, Hagan et al. (2002), Rebonato (2007) et Rebonato et White (2009) suggèrent, dans le cas du marché des dérivés sur taux d'intérêt, de fixer le coefficient  $\beta = \frac{1}{2}$ . On fixera donc le coefficient  $\beta = \frac{1}{2}$  lors de la calibration du modèle SABR<sup>32</sup>.

Le paramètre  $\beta$  fixé, la calibration du modèle SABR s'effectue aisément. On minimise la fonction (4.19) par rapport aux paramètres  $\alpha$ ,  $\rho$  et  $\nu$  pour une échéance quelconque. Ensuite, on accomplit cette procédure pour toutes les échéances de nos caplets.

### 4.3.3 Calibration du modèle de marché LIBOR

La calibration du modèle de marché LIBOR s'exécute en posant une forme fonctionnelle à la fonction de volatilité instantanée  $\sigma_j(t)$  exposée à la section 3.1.1. La définition d'une forme fonctionnelle homogène temporellement assurera une forme stable à la courbe de volatilité instantanée. Comme le dé-

32. Nous avons aussi appliqué la régression linéaire telle que décrite par Hagan et al. (2002) à notre échantillon et nous arrivons approximativement à un coefficient  $\beta = \frac{1}{2}$ .

montre empiriquement Rebonato (2002), cette caractéristique est souhaitable puisque la courbe de volatilité des taux forward démontre une certaine persistance dans le temps. Explicitement, cela revient donc à poser l'égalité suivante :

$$\sigma_j(t) = \sigma(T_{j-1} - t) \quad (4.20)$$

La forme donnée à la fonction  $\sigma(T_{j-1} - t)$  est capitale puisqu'elle permettra à la courbe de volatilité instantanée de préserver sa forme au fil du temps et permettra une certaine flexibilité pour répliquer le prix des caplets. À cette fin, on utilise la forme paramétrique, proposée par Rebonato (2002), définie telle que :

$$\sigma(T_{j-1} - t) = \int_0^{T_{j-1}} ([a + b(T_{j-1} - t)]e^{-c(T_{j-1}-t)} + d) dt \quad (4.21)$$

Cette forme fonctionnelle exhibe plusieurs qualités intéressantes, dont celles mentionnées ci-haut. De plus, comme le démontre Rebonato (2002), l'intégrale du carré de l'équation (4.21) possède une solution analytique ce qui accélère la calibration. Cette solution analytique combinée à l'équation (3.4) permettra d'obtenir rapidement les volatilités implicites. Ensuite, les volatilités implicites sont introduites dans la formule de tarification des caplets (2.1). Par la suite, il ne reste plus qu'à minimiser la fonction (4.19) par rapport à la totalité des prix caplets, et ce pour toutes les échéances. Par ailleurs, la minimisation s'effectue sur les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ .

D'ailleurs, cette caractéristique évoque la différence entre la procédure de calibration du modèle de marché LIBOR et du modèle SABR. En effet, le modèle de marché LIBOR se calibre sur l'entièrete de la surface de volatilité disponible, car la dynamique des taux forward le permet contrairement au modèle SABR. Cependant, les prix dérivés du modèle de marché LIBOR seront issus d'une structure de volatilités plate. La calibration des modèles DD et LM permettra une flexibilité qu'interdit le modèle de marché LIBOR par hypothèse. Le modèle de marché LIBOR servira donc d'étalon afin de comparer les modèles incorporant explicitement le *smile*.



### 4.3.4 Calibration du modèle DD

La calibration du modèle DD est similaire à celle utilisée pour la calibration du modèle de marché LIBOR. La structure de la volatilité paramétrique (4.21) est conservée, mais les volatilités estimées devront subir la transformation (3.16). Cette modification des volatilités implicites permettront leur utilisation directe dans l'équation (3.15) et ainsi obtenir les prix des caplets. Ensuite, comme pour le modèle de marché LIBOR, il ne reste plus qu'à minimiser la fonction (4.19) par rapport à la totalité des prix caplets, et ce pour toutes les échéances. Toutefois, le paramètre supplémentaire  $\alpha$  ajoutera la flexibilité nécessaire pour saisir la présence d'un *skew* dans le prix des caplets. Ainsi, la minimisation s'exécute sur les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $\alpha$ .

### 4.3.5 Calibration du modèle LM

La calibration du modèle LM est différente dans la mesure qu'elle nécessite la spécification d'une forme fonctionnelle pour les  $N$  structures de volatilités  $\sigma_j(t)$ . Dès lors, le choix de  $N$  déterminera la qualité de la calibration, mais aussi agira sur la stabilité future des paramètres. Afin d'éviter les risques de surparamétrisation et permettre une certaine flexibilité du modèle, on considère  $N = 2$ . Donc, on doit caractériser la fonction  $\sigma_1(t)$  et  $\sigma_2(t)$ . Chaque fonction de volatilités exhibera la forme fonctionnelle (4.21). Chaque fonction de volatilités sera pondérée par  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Par contre, la contrainte  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$  permet de substituer  $\lambda_2$  par  $1 - \lambda_1$  et ainsi réduire le nombre de paramètres. Les structures de volatilités  $\sigma_1(t)$  et  $\sigma_2(t)$  possèdent une solution analytique et donc en les combinant à l'équation (3.4) on obtient les volatilités implicites. Ensuite, les volatilités implicites sont introduites dans la formule de tarification des caplets (3.22). Par la suite, il ne reste plus qu'à minimiser la fonction (4.19) par rapport à la totalité des prix caplets, et ce pour toutes les échéances. La minimisation portera sur les paramètres  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ ,  $d_2$  et  $\lambda_1$ . Ces 9 paramètres permettent de constater pourquoi on a opté pour seulement un mélange de deux densités log-normales. On note aussi qu'il est assez aisé de

jumeler les modèles LM et DD pour ajouter une plus grande flexibilité dans les structures de volatilités possibles.

On constate que le nombre de paramètres à optimiser est imposant et on s'assure donc d'une fonction d'optimisation hautement non linéaire. Par contre, comme on a préalablement mentionné, on utilise une méthode d'optimisation globale ce qui permettra d'éviter les minima locaux. Les résultats de l'optimisation seront beaucoup plus précis qu'avec une méthode locale, mais rien ne garantit la stabilité des paramètres d'une période à l'autre. C'est d'ailleurs le danger principal des modèles avec de nombreux paramètres, soit l'instabilité des paramètres qui peuvent amener des distorsions dans les prix futurs estimés. Le modèle reproduira efficacement la surface actuelle, mais aura une capacité médiocre à prédire le prix des caps futurs. Cependant, on spécule et on pourra apprécier plus en détail les performances de calibration et de tarification du modèle LM au chapitre 5.

# Chapitre 5

## Analyse des résultats

Ce chapitre constitue l'aboutissement de cette recherche, car il matérialise empiriquement les concepts théoriques introduits aux chapitres précédents et fournit une évaluation expérimentale de la performance de tarification et d'opérations d'arbitrage en couverture, en présence du *smile* de volatilité, de quatre modèles. Dans un premier temps, on décrit la base de données sur laquelle cette recherche s'appuie. Dans un deuxième temps, on présente les résultats de calibration des différents modèles étudiés. Finalement, l'essence de cette recherche sera concentrée dans une analyse détaillée de la performance de tarification et de couverture de chaque modèle.

### 5.1 Les données

Cette recherche s'appuie sur deux catégories de données pour produire les résultats empiriques. D'une part, les taux LIBOR, les contrats Eurodollar et les taux swaps définissent conjointement la structure à terme des taux d'intérêt. D'autre part, les volatilités implicites des caps américains fournissent la surface des volatilités. Comme on démontre au chapitre 2, la volatilité de Black (1976) cotée sur le marché, combinée à l'information inférée de la structure à terme des taux d'intérêt permet de déterminer le prix au marché des caps

avec l'équation (2.1). Les données ont été obtenues de la plateforme d'information financière Bloomberg pour une fréquence hebdomadaire (vendredi) et pour la période s'étendant du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008 totalisant 252 semaines.

La structure à terme des taux d'intérêt est dérivée selon la procédure élaborée à la section 4.1 à partir des taux LIBOR au jour le jour, 1 à 3 mois, des 8 premiers contrats Eurodollar futures et des taux swaps américains au pair d'échéance 2 à 10 ans. Les données concernant les caps américains consistent en des observations hebdomadaires de la volatilité implicite de 42 caps, soit 6 échéances et 7 taux d'exercice. Notre recherche possède une base de données qui lui confère un avantage probant relativement à la littérature empirique existante. Après les travaux de Li et Zhao (2006) et Jarrow et al. (2007), qui emploient une base de données commune, cette recherche utilise la base de données la plus étoffée dans l'évaluation de la performance de tarification et d'opérations d'arbitrage en couverture de dérivés sur taux d'intérêt de type caps. Ainsi, chaque jour composant notre échantillon on observe pour toutes les échéances 7 taux d'exercice : 1.5, 2, 3, 4, 5, 6 et 7%. De plus, on observe les caps pour 6 échéances différentes, soit 2 à 7 ans. Au total, notre base de données est constituée d'une série de 42 caps observée hebdomadairement. La richesse de notre base de données permettra donc de considérer l'effet du *smile* de volatilité dans la performance de tarification et de couverture des modèles sélectionnés.

Le tableau 5.1 présente les statistiques descriptives des volatilités implicites des caps cotées sur le marché. La figure 5.1 montre les séries chronologiques des caps pour les différents taux d'exercice.

On remarque qu'indépendamment du taux d'exercice, les volatilités implicites exhibent un comportement quantitatif et qualitatif similaire. D'une part, les volatilités de court terme sont en moyenne plus élevées que les volatilités de long terme et l'écart-type est décroissant en regard de l'échéance des caps. D'autre part, les séries chronologiques des caps suivent une période très stable du premier trimestre de 2005 au deuxième trimestre de 2007. Par la suite,

Tableau 5.1

**Statistiques Sommaires des Cotations de Caps**

Ce tableau présente les statistiques descriptives des cotations de caps américains en terme de volatilités de Black (1976) pour chaque taux d'exercice. La période d'analyse comprend 252 semaines et s'étale du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008.

	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans
Taux d'exercice 1,5%						
Moyenne	39.4	39.6	39.1	38.5	37.9	37.2
Médiane	35.0	36.2	36.5	36.2	35.8	35.2
Écart-Type	9.5	7.9	6.7	5.8	5.2	4.7
Minimum	28.3	28.9	30.2	31.4	30.9	30.5
Maximum	82.6	73.9	68.5	64.9	61.1	58.7
Taux d'exercice 2%						
Moyenne	35.3	35.6	35.0	34.5	33.9	33.2
Médiane	31.4	32.5	32.5	32.3	32.2	31.6
Écart-Type	8.9	7.2	6.1	5.3	4.7	4.3
Minimum	23.4	26.2	27.9	27.5	27.3	26.9
Maximum	74.9	66.3	61.2	57.9	54.5	52.3
Taux d'exercice 3%						
Moyenne	29.4	29.5	29.1	28.6	28.1	27.6
Médiane	24.6	25.7	26.5	26.7	26.6	26.3
Écart-Type	8.8	6.9	5.7	5.0	4.4	3.9
Minimum	18.3	20.4	20.6	21.3	21.7	21.7
Maximum	64.6	55.6	50.8	47.9	45.1	43.3
Taux d'exercice 4%						
Moyenne	25.9	25.6	25.1	24.6	24.2	23.7
Médiane	21.0	22.2	22.9	23.0	22.9	22.8
Écart-Type	9.0	6.8	5.4	4.6	4.0	3.5
Minimum	16.6	17.5	17.8	17.9	17.9	17.8
Maximum	57.2	47.2	42.8	40.4	38.0	36.5
Taux d'exercice 5%						
Moyenne	23.3	22.8	22.2	21.7	21.2	20.8
Médiane	19.9	20.7	21.2	21.1	20.6	20.4
Écart-Type	9.5	7.1	5.7	4.8	4.1	3.6
Minimum	12.1	13.4	14.0	14.3	14.4	14.5
Maximum	50.1	41.8	37.3	34.7	32.6	31.4
Taux d'exercice 6%						
Moyenne	22.4	21.8	21.1	20.4	19.9	19.4
Médiane	19.3	20.3	20.2	20.2	19.9	19.6
Écart-Type	9.2	6.9	5.6	4.7	4.0	3.5
Minimum	10.2	11.4	12.1	12.4	12.6	12.8
Maximum	46.8	41.2	36.4	32.7	30.1	28.1
Taux d'exercice 7%						
Moyenne	21.9	21.5	20.6	19.9	19.3	18.7
Médiane	19.3	20.1	19.9	19.8	19.4	19.1
Écart-Type	8.8	6.6	5.3	4.5	3.8	3.4
Minimum	10.0	11.5	11.8	12.0	12.2	12.3
Maximum	46.8	41.1	36.0	32.2	29.4	27.2

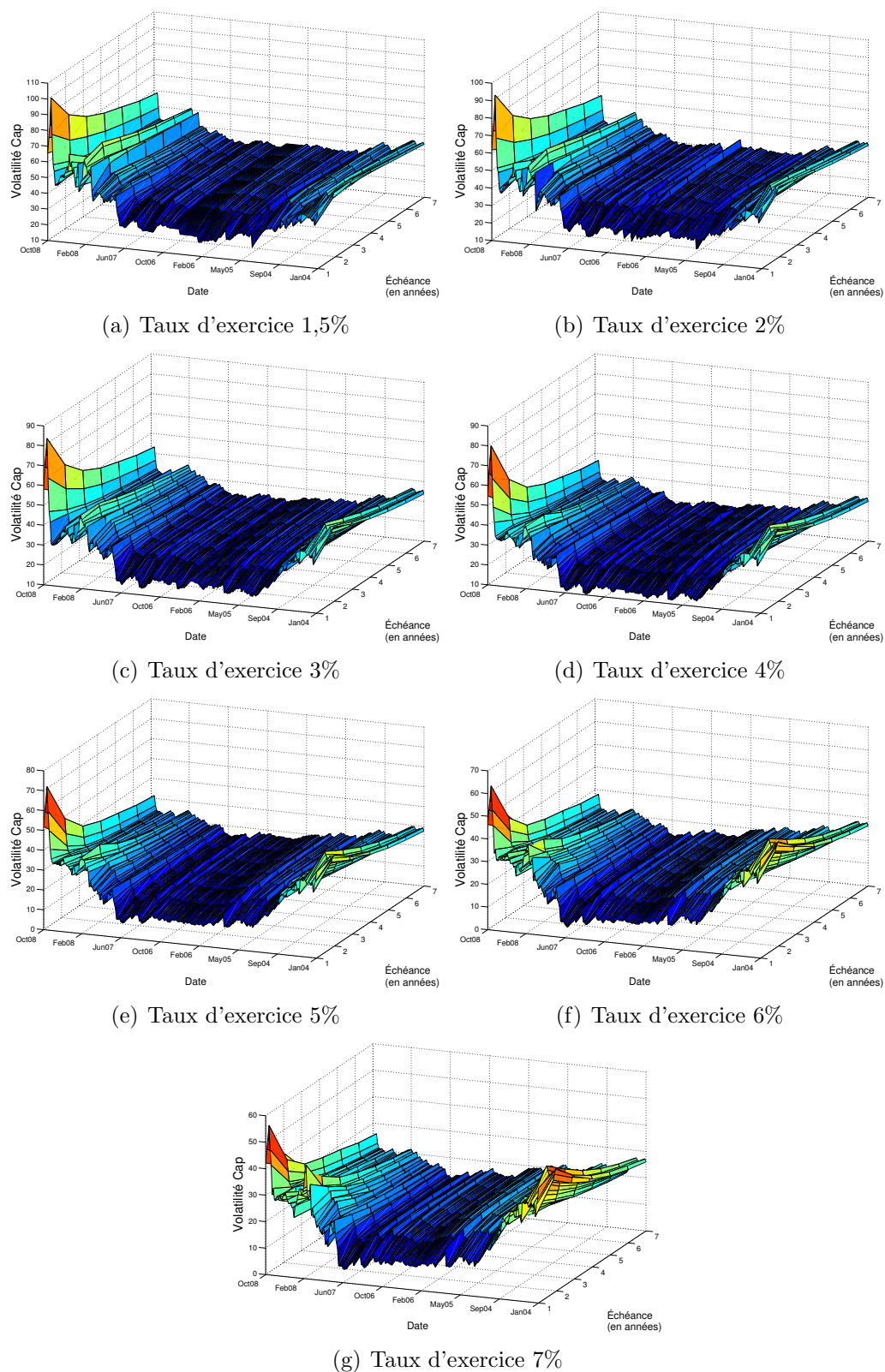


FIGURE 5.1 – Séries chronologiques des cotations caps pour la période du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008.

les volatilités implicites subissent une hausse marquée, atteignant même des volatilités extrêmes, reflétant l'incertitude du marché exacerbée par la crise financière de 2008.

## 5.2 Résultats empiriques

Cette section présente les principaux résultats de notre recherche et fournit une évaluation empirique des quatre modèles. On souligne que le modèle LM-DD représente le modèle le plus complet étudié dans la catégorie des modèles de marché, car il inclut les modèles LMM et DD comme des cas particuliers<sup>33</sup>. Bien que le modèle SABR ne fasse pas partie de la catégorie des modèles de marché, il demeure un rouage essentiel de notre analyse en partie dû à sa popularité et son statut d'étalon au sein du marché des dérivés sur taux d'intérêt. De plus, les mérites du modèle SABR pour reproduire le *smile* de volatilité semblent à ce jour encore inégalés.

### 5.2.1 Résultats de calibration

Pour mesurer l'efficacité de la procédure de calibration évoquée à la section 4.3, on applique celle-ci à notre base de données. On rappelle que le modèle SABR est calibré 27 fois, soit une fois pour chacune des échéances de caplets de notre échantillon, car il est impossible de calibrer le modèle SABR sur une surface de volatilité entière. Aussi, on souligne que les modèles LMM, DD et LM-DD sont calibrés une seule fois, soit sur toute la surface de volatilité disponible qui est composée de 189 caplets. Sans équivoque, le modèle SABR aura donc une meilleure qualité de calibration. Le tableau 5.2 présente les statistiques descriptives des paramètres estimés pour tous les modèles.

De prime abord, malgré de multiples calibrations, soit une pour chacune des 27 échéances de caplets, le modèle SABR affiche une stabilité des paramètres

---

33. Pour le modèle LM-DD, en posant  $\lambda = 1$  et  $\alpha = 0$  on obtient le modèle LMM. En posant  $\lambda = 1$  on obtient le modèle DD.

Tableau 5.2  
Estimation des Paramètres

Ce tableau présente les statistiques descriptives des paramètres estimés pour les différents modèles. Les modèles sont calibrés sur les cotations des caplets pour toutes les échéances et tous les taux d'exercice, chaque semaine de notre échantillon selon la procédure établie au chapitre 4. Le modèle SABR est calibré 27 fois, soit une fois pour chacune des 27 échéances de caplets. Les modèles LMM, DD et LM-DD sont calibrés une seule fois sur la surface de volatilité entière qui comprend 189 caplets. La période d'analyse s'étend du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008.

Panel A : Paramètres du modèle SABR				
Paramètre	Moyenne	Min	Max	Écart-type
$\alpha$	0.0463	0.0148	0.1603	0.0137
$\beta$	0.5	0.5	0.5	0
$\rho$	-0.1904	-0.9999	0.9999	0.4106
$\nu$	0.3166	0.0001	1.2547	0.1318

Panel B : Paramètres de la catégorie des modèles de marché						
Paramètre	LMM		DD		LM-DD (N=2)	
	Moyenne	É-Type	Moyenne	É-Type	Moyenne	É-Type
$a_1$	0.0885	0.1782	0.1472	0.2730	0.1549	0.3543
$a_2$					-0.2004	0.7747
$b_1$	-2.0889	2.6828	-2.5912	3.8737	-2.9262	4.3580
$b_2$					-4.8740	5.3601
$c_1$	3.6427	2.1703	3.6643	2.1418	4.9756	4.9318
$c_2$					4.3192	3.6715
$d_1$	0.1821	0.0584	0.1857	0.0700	0.1868	0.1300
$d_2$					0.5865	0.8424
$\alpha$			0.1248	0.3921	0.4584	0.4247
$\lambda$					0.7081	0.1635

$\alpha$  et  $\nu$  indiquant que le choix du paramètre  $\beta$  est optimal. D'ailleurs, Rebonato et al. (2009) arguent que des quantités telle la volatilité de la volatilité  $\nu$  devrait être stable dans le temps et que des variations anormales indiquerait que le modèle est mal spécifié ou corollairement que le paramètre  $\beta$  est non optimal. Par contre, le paramètre  $\rho$  exhibe un comportement assez volatil. En effet, après une analyse détaillée, on constate que numériquement, pour les échéances de moins de 2 ans, le paramètre  $\rho$  atteint souvent la borne inférieure de corrélation. Sachant que le paramètre  $\rho$  gouverne principalement le *skew* du *smile*, on peut déduire que le modèle SABR ne génère pas suffisamment de *skew* pour reproduire le prix des caplets à court terme. Ces résultats corroborent ceux de Jarrow et al. (2007) qui observent qu'un modèle à volatilité stochastique n'est pas suffisant pour correctement tarifier les caplets à court terme et qu'il devient donc essentiel d'introduire des sauts pour générer assez d'asymétrie à court terme. Afin de s'assurer que la méthodologie de calibration spécifique au



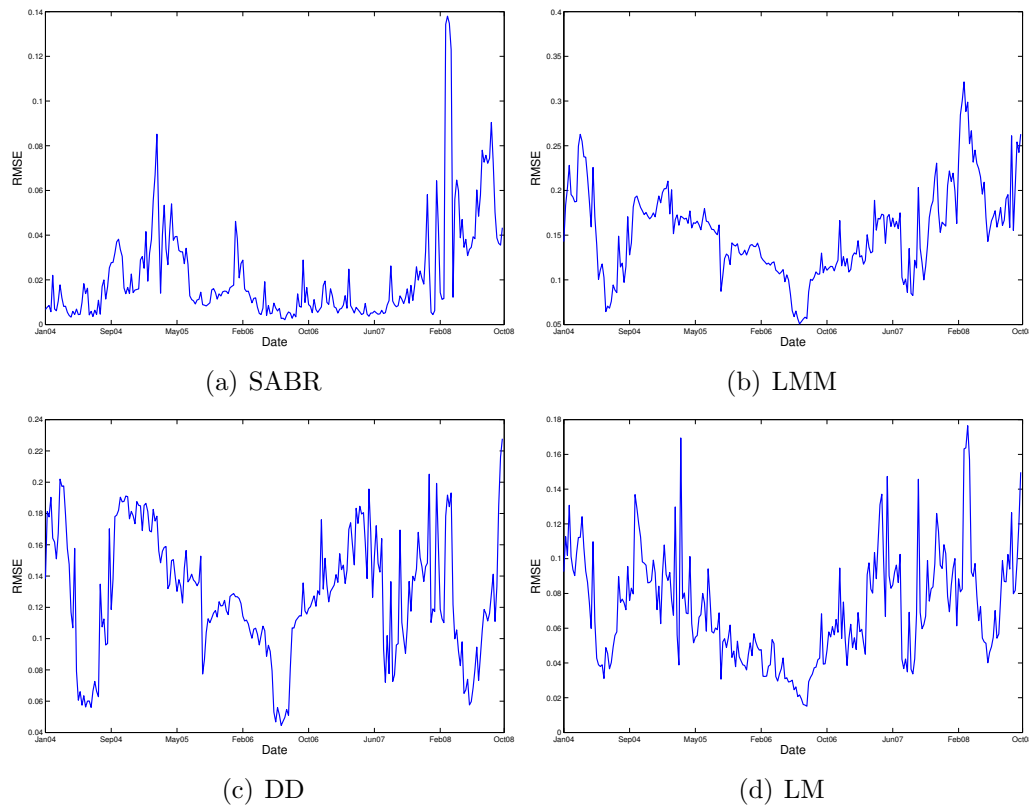
modèle SABR, soit fixer le paramètre  $\beta$ <sup>34</sup>, ne contraint pas le modèle SABR, on recalibre le modèle en laissant varier tous les paramètres pour les échéances le nécessitant. On obtient les mêmes difficultés numériques démontrant que le modèle SABR éprouve des difficultés notables avec le comportement des caplets de court terme.

Ensuite, pour la catégorie des modèles de marché on constate que les paramètres de la première densité lognormale sont du même signe et pratiquement du même ordre de grandeur, mais que la variabilité des paramètres augmente avec le nombre de paramètres inclus dans le modèle. Aussi, pour le modèle LM-DD on constate que la deuxième densité lognormale implique une forme de la structure différente des volatilités implicites avec des paramètres  $a_2$ ,  $b_2$  et  $d_2$  significativement différent de  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$ .

La figure 5.2 trace l'évolution des erreurs quadratiques moyennes (RMSE) et le tableau 5.3 présente les statistiques descriptives des RMSE pour tous les modèles étudiés. Tout d'abord, conformément à ce qu'on attendait, le modèle SABR possède les RMSE les plus faibles en raison des multiples calibrations, soit une pour chacune des 27 échéances de caplet. En ce qui concerne les modèles de marché, on remarque des RMSE plus faibles pour les modèles plus complets. Ainsi, le modèle LM-DD possède des RMSE plus faibles que le modèle DD qui à son tour possède des RMSE plus faibles que le modèle LMM. Ce comportement, conformément à ce qui est attendu, indique que plus on augmente le nombre de paramètres plus faible sera les RMSE. Ensuite, on observe à la figure 5.2 un comportement passablement erratique des RMSE pour la période avoisinante février 2008. Ce comportement inusité coïncide avec une hausse des remboursements anticipés des titres adossés à des hypothèques (MBS), hausse inférée de l'augmentation de l'index de refinancement hypothécaire MBA<sup>35</sup> durant cette même période. Comme nous avons brièvement abordé à la section 3.1.1, cette hausse des remboursements anticipés exerce une pression à la hausse sur la demande de caps et vient provoquer des distorsions

34. Comme mentionné à la section 3.2, le paramètre  $\beta$  agit aussi sur le *skew*.

35. *Mortgage Bankers Association*. Cet index est le meilleur indicateur global de l'activité de refinancement hypothécaire et fut utilisé dans l'article de Duarte (2008).



**FIGURE 5.2 – Séries Chronologiques des Erreurs Quadratiques Moyenne (RMSE) de Tarification pour la Période du 9 Janvier 2004 au 31 Octobre 2008.**

dans le marché qui font probablement dévier le prix des caps de leurs prix habituels. Le comportement du prix des caps durant cette période pourrait expliquer les difficultés des différents modèles à bien saisir le prix des caps. Jarrow et al. (2007) corroborent cette relation pour leur période d'analyse et notent aussi des difficultés numériques durant les périodes de hausse de l'index MBA. De plus, pour consolider notre hypothèse, on remarque à la figure 5.1 une hausse marquée des volatilités implicites durant cette même période. Tel que le démontre Duarte (2008), l'index de refinancement hypothécaire de la MBA a un lien étroit avec les volatilités implicites des dérivés sur taux d'intérêt.

Tableau 5.3  
Erreurs Quadratiques Moyenne (RMSE)

Ce tableau présente les statistiques descriptives des erreurs quadratiques moyenne (RMSE) pour les différents modèles. Les modèles sont calibrés sur les cotations des caplets pour toutes les échéances et tous les taux d'exercice, chaque semaine de notre échantillon selon la procédure établie au chapitre 4. Le modèle SABR est calibré 27 fois, soit une fois pour chacune des 27 échéances de caplets. Les modèles LMM, DD et LM-DD sont calibrés une seule fois sur la surface de volatilité entière qui comprend 189 caplets. La période d'analyse s'échelonne du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008.

	SABR	LMM	DD	LM-DD
Moyenne	0.0217	0.1536	0.1289	0.0714
Écart-type	0.0227	0.0500	0.0397	0.0320
Minimum	0.0021	0.0507	0.0445	0.0151
Maximum	0.1380	0.3214	0.2278	0.1765

### 5.2.2 Performance de tarification

La performance de tarification, tel que le mentionnent Gupta et Subrahmanyam (2005), illustre la capacité d'un modèle à prédire les prix futurs des dérivés sur taux d'intérêt conditionnellement à l'information contenue dans la structure à terme des taux. Pour évaluer à quel point un modèle est apte à prédire les prix futurs des dérivés, notre méthodologie s'inspire de celle employée par Driessen et al. (2003), Gupta et Subrahmanyam (2005) et Fan et al. (2007).

Précisément, en utilisant la structure à terme des taux d'intérêt conjointement avec le prix des caps à une date  $T_i$ , on calibre les modèles selon la procédure décrite à la section 4.3 afin d'inférer les paramètres propres à chaque modèle. Après  $\tau$  semaines, on tarifie les caps à l'aide de la structure à terme à terme des taux d'intérêt disponible à  $T_i + \tau$  et des paramètres estimés à  $T_i$ . On déduit alors le prix des caps estimés par chaque modèle des prix observés sur le marché pour mesurer les erreurs de tarification après  $\tau$  semaines. Cette procédure est répétée pour toutes les semaines de notre échantillon. Notre approche permet donc d'évaluer la performance de tarification en coupe transversale hors échantillon.

On opte pour  $\tau$  égal à 1 et 2 semaines. Le premier choix découle de la nature hebdomadaire de nos données, car il représente le plus petit intervalle de temps entre deux observations consécutives. Le deuxième choix reflète un

Tableau 5.4  
**Performance de Tarification Hors Échantillon**

Ce tableau présente les statistiques sommaires des erreurs de tarification (en point de base et en pourcentage) une semaine et deux semaines hors échantillon pour les modèles étudiés. L'erreur moyenne est définie par la différence entre le prix prédit par le modèle et le prix coté par le marché en moyenne pour les 42 caps de l'échantillon, soit 7 taux d'exercices et 6 échéances, et pour les 252 semaines d'analyse (9 janvier 2004 au 31 octobre 2008).

Modèle	Erreur Moyenne (bp)	Erreur Moyenne Absolue (bp)	Erreur Moyenne %	Erreur Moyenne Absolue %
Panel A : Performance de tarification 1 semaine hors échantillon				
SABR	0.06	5.42	0.73%	4.84%
LMM	-16.5	18.4	-4.10%	8.32%
DD	-7.57	11.9	-2.39%	7.14%
LM-DD	-4.19	9.51	-1.16%	6.81%
Panel B : Performance de tarification 2 semaines hors échantillon				
SABR	-0.04	6.77	0.99%	6.38%
LMM	-16.4	19.0	-3.76%	9.49%
DD	-7.65	12.7	-2.05%	8.52%
LM-DD	-7.70	12.7	-4.62%	9.77%

horizon temporel communément utilisé dans les banques pour l'évaluation des risques tels qu'argument Driessen et al. (2003).

Le tableau 5.4 donne une appréciation générale de la qualité de tarification empirique des modèles. Tout d'abord, on remarque que le modèle SABR performe mieux que les autres modèles sur tous les niveaux et affiche un biais presque nul. Ensuite, le modèle LM-DD est légèrement plus performant que le modèle DD pour la mesure d'erreur moyenne absolue en pourcentage, mais diminue de plus de 1% l'erreur moyenne en pourcentage de tarification. De plus, le modèle LMM semble possiblement biaisé négativement étant donné l'erreur moyenne en pourcentage largement négative par rapport aux autres modèles. Pour la période de deux semaines, le modèle LM-DD est celui qui performe le moins bien au niveau de l'erreur moyenne en pourcentage et l'erreur moyenne absolue en pourcentage. Une cause possible est le large éventail de paramètres, qui comme on a remarqué au tableau 5.2, sont beaucoup plus volatils que les autres modèles, ce qui pourrait causer une certaine instabilité des paramètres à plus long terme.

Néanmoins, le tableau 5.4 donne une impression globale qui n'exploite pas

la richesse de notre base de données. Dès lors, on segmente les résultats de tarification des caps par échéance et taux d'exercice. Le tableau 5.5 présente l'erreur quadratique moyenne de tarification des caps exprimée en pourcentage pour différentes échéances et différents taux d'exercices.

Tout d'abord, on constate la piètre performance de tous les modèles à prédire le prix des options à court terme et hors jeu, soit principalement les taux d'exercices de 6% et 7%. La performance semble s'améliorer pour les caps de longue échéance, mais on conserve tout de même des erreurs supérieures à 10%. Ensuite, pour tous les modèles on observe généralement une relation inverse entre les erreurs de tarification et l'échéance des caps et ce pour la plupart des taux d'exercices. Une analyse approfondie des erreurs de tarifications révèlent que la performance médiocre des modèles pour tarifier les caps de court terme hors jeu provient surtout de la période avoisinante février 2008. Comme préalablement mentionné, il est possible que durant cette période le prix des caps fût dévié des prix habituels rendant plus difficile la tâche des modèles. Aussi, on constate qu'en général, le modèle SABR performe mieux que les autres modèles pour toutes les échéances et tous les taux d'exercices, excepté pour le caps 2 ans à 7%. Ces résultats corroborent les résultats de Li et Zhao (2006) et Jarrow et al. (2007) qui arguent que leurs modèles ont beaucoup de difficultés à tarifier les caps de court terme hors jeu. Jarrow et al. (2007) indiquent que l'inclusion de sauts largement négatifs est nécessaire pour bien cerner les cotations de caps court terme, une caractéristique qu'aucun des modèles étudiés dans cette recherche ne possède.

Le tableau 5.5 montre les erreurs quadratiques moyennes de tarification, mais n'indique pas la direction des erreurs. Le tableau 5.6 présente donc les erreurs de tarification moyenne pour tous les modèles. Tout d'abord, on remarque que le modèle SABR possède des erreurs de tarification moyenne pratiquement nulle pour les caps en jeu, et ce indépendamment de l'échéance. Par contre, les erreurs de tarification sont supérieures à 1% pour toutes les échéances pour les caps 7% et on atteint même une erreur de tarification de 10% pour le caps 2 ans à 7%. Ces observations viennent renforcer le constat que le modèle SABR éprouve des difficultés à tarifier adéquatement les caps hors jeu de

Tableau 5.5

### Erreurs Quadratiques Moyennes de Tarification Exprimées en Pourcentage

Ce tableau présente les erreurs quadratiques moyennes de tarification une semaine hors échantillon selon l'échéance et le taux d'exercice d'un cap pour les modèles étudiés. L'erreur moyenne en pourcentage est définie par la différence entre le prix prédit par le modèle et le prix coté par le marché divisée par le prix coté par le marché. Formellement, avec  $P^*$  le prix prédit et  $P$  le prix courant l'erreur de tarification moyenne est  $\frac{P^* - P}{P}$ . Les modèles sont calibrés sur les cotations des caplets pour toutes les échéances et tous les taux d'exercice, chaque semaine de notre échantillon selon la procédure établie au chapitre 4. Le modèle SABR est calibré 27 fois, soit une fois pour chacune des 27 échéances de caplets. Les modèles LMM, DD et LM-DD sont calibrés une seule fois sur la surface de volatilité entière qui comprend 189 caplets. La période d'analyse s'échelonne du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008.

Taux d'exercice	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans
Panel A : RMSE des erreurs moyennes de tarification en % du modèle SABR						
1,5%	1.10	0.74	0.68	0.66	0.64	0.64
2%	1.80	1.11	0.96	0.89	0.85	0.83
3%	4.33	2.49	2.02	1.79	1.64	1.54
4%	7.76	4.56	3.66	3.21	2.92	2.72
5%	13.88	8.65	6.90	5.95	5.31	4.87
6%	29.09	14.84	11.50	9.64	8.42	7.60
7%	47.90	22.22	16.83	13.80	11.90	10.66
Panel B : RMSE des erreurs moyennes de tarification en % du modèle LMM						
1,5%	2.69	2.28	2.26	2.31	2.37	2.46
2%	5.34	4.25	4.03	3.97	3.97	4.03
3%	11.94	8.85	8.24	7.94	7.76	7.67
4%	17.66	12.18	11.50	11.00	10.59	10.29
5%	22.76	13.46	12.10	11.08	10.21	9.55
6%	29.50	16.73	12.80	10.81	9.33	8.35
7%	43.98	31.72	19.67	16.19	14.33	13.72
Panel C : RMSE des erreurs moyennes de tarification en % du modèle DD						
1,5%	1.47	1.34	1.40	1.47	1.55	1.63
2%	2.72	2.32	2.34	2.39	2.45	2.51
3%	6.51	4.86	4.69	4.60	4.53	4.48
4%	11.40	7.71	7.13	6.78	6.48	6.25
5%	18.99	12.10	9.64	8.60	7.97	7.67
6%	31.46	19.86	13.72	11.79	10.93	10.78
7%	44.29	31.27	19.46	16.39	15.38	15.65
Panel D : RMSE des erreurs moyennes de tarification en % du modèle LM-DD						
1,5%	1.55	1.07	1.03	1.09	1.17	1.25
2%	2.54	1.76	1.69	1.73	1.77	1.82
3%	5.86	3.89	3.59	3.44	3.30	3.21
4%	11.66	7.78	6.70	6.02	5.49	5.10
5%	19.82	13.98	11.09	9.55	8.46	7.70
6%	31.13	20.78	14.91	12.41	10.76	9.77
7%	50.61	33.00	21.65	18.10	15.67	14.38

courte échéance. Ensuite, on remarque qu'excepté quelques échéances du cap à 7%, le modèle LMM exhibe des erreurs de tarification moyennes largement négatives pour la majorité des échéances, indiquant la présence possible d'un biais. On exclut l'erreur de spécification de la structure de volatilité instantanée choisie, car les modèles DD et LM-DD utilisent la même structure et leurs biais sont bien moindres que le modèle LMM. Finalement, on remarque que les modèles DD et LM-DD diminuent significativement les erreurs de tarification moyennes. La modélisation du *smile* semble donc nécessaire afin d'établir des opérations de tarification cohérente.

Afin d'étudier la pertinence d'un modèle à bien cerner la dynamique du *smile* de volatilité, on effectue une comparaison développée par Diebold et Mariano (1995) et employée dans l'article de Jarrow et al. (2007). Cette comparaison permet de tester si un modèle a des erreurs de tarification statistiquement inférieures à un autre modèle. Ainsi, supposons deux modèles avec des erreurs de tarification  $\{\varepsilon_1(t)\}_{t=1}^T$  et  $\{\varepsilon_2(t)\}_{t=1}^T$ . L'hypothèse nulle d'erreurs de tarification identiques est  $E[\varepsilon_1(t)] = E[\varepsilon_2(t)]$ , ou  $E[d(t)] = 0$  avec  $d(t) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$ . Diebold et Mariano (1995) démontre que si la variance de  $\{d(t)\}_{t=1}^T$  est stationnaire on obtient :

$$\sqrt{T}(\bar{d} - \mu_d) \sim \mathcal{N}(0, 2\pi f_d(0)), \quad (5.1)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)] \\ f_d(0) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \gamma_d(q) \\ \gamma_d(q) &= E[(d_t - \mu_d)(d_{t-q} - \mu_d)] \end{aligned}$$

Ainsi, Diebold et Mariano (1995) démontrent que pour les gros échantillons  $\bar{d}$  est approximativement distribué normalement avec une moyenne  $\mu_d$  et une variance de  $\frac{2\pi f_d(0)}{T}$ . La statistique  $S$  pour tester l'hypothèse nulle d'erreurs de

Tableau 5.6

**Erreurs Moyennes de Tarification Exprimées en Pourcentage**

Ce tableau présente les erreurs moyennes de tarification exprimées en pourcentage une semaine hors échantillon selon l'échéance et le taux d'exercice d'un cap pour les modèles étudiés. L'erreur moyenne en pourcentage est définie par la différence entre le prix prédit par le modèle et le prix coté par le marché divisée par le prix coté par le marché. Formellement, avec  $P^*$  le prix prédit et  $P$  le prix courant l'erreur de tarification moyenne en pourcentage est  $\frac{P^* - P}{P}$ . Les modèles sont calibrés sur les cotations des caplets pour toutes les échéances et tous les taux d'exercice, chaque semaine de notre échantillon selon la procédure établie au chapitre 4. Le modèle SABR est calibré 27 fois, soit une fois pour chacune des 27 échéances de caplets. Les modèles LMM, DD et LM-DD sont calibrés une seule fois sur la surface de volatilité entière qui comprend 189 caplets. La période d'analyse s'échelonne du 9 janvier 2004 au 31 octobre 2008.

Taux d'exercice	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans
Panel A : Erreurs moyennes de tarification en % du modèle SABR						
1,5%	0.10	0.06	0.05	0.06	0.08	0.10
2%	0.19	0.06	0.02	0.03	0.05	0.06
3%	0.60	0.03	-0.09	-0.12	-0.13	-0.12
4%	0.74	-0.03	-0.18	-0.25	-0.29	-0.31
5%	1.80	1.26	1.11	0.96	0.86	0.78
6%	2.57	0.57	0.23	0.11	0.06	0.04
7%	10.15	3.11	2.03	1.50	1.19	1.01
Panel B : Erreurs moyennes de tarification en % du modèle LMM						
1,5%	-1.14	-1.11	-1.26	-1.43	-1.61	-1.79
2%	-2.51	-2.29	-2.46	-2.67	-2.89	-3.10
3%	-6.73	-5.74	-5.90	-6.09	-6.28	-6.44
4%	-12.05	-9.18	-9.17	-9.10	-9.02	-8.93
5%	-17.13	-9.12	-8.39	-7.71	-7.17	-6.73
6%	-15.79	-2.15	-2.44	-1.92	-1.43	-0.89
7%	-4.58	9.64	5.43	5.32	5.62	6.33
Panel C : Erreurs moyennes de tarification en % du modèle DD						
1,5%	-0.30	-0.44	-0.65	-0.82	-0.97	-1.09
2%	-0.72	-0.91	-1.23	-1.46	-1.64	-1.77
3%	-2.11	-2.23	-2.77	-3.04	-3.17	-3.22
4%	-5.31	-3.68	-4.14	-4.11	-3.92	-3.67
5%	-9.98	-3.08	-2.75	-1.88	-0.99	-0.20
6%	-15.60	-1.80	-0.86	1.10	2.82	4.32
7%	-23.45	-4.00	-2.79	0.98	4.13	6.90
Panel D : Erreurs moyennes de tarification en % du modèle LM-DD						
1,5%	0.05	-0.08	-0.20	-0.26	-0.29	-0.30
2%	-0.10	-0.29	-0.49	-0.57	-0.61	-0.61
3%	-1.01	-1.12	-1.49	-1.56	-1.54	-1.48
4%	-4.07	-2.80	-3.21	-3.05	-2.80	-2.53
5%	-8.71	-3.75	-3.97	-3.30	-2.57	-1.90
6%	-9.77	-1.17	-2.50	-1.71	-0.75	0.22
7%	3.57	7.74	2.03	1.98	2.65	3.68



tarification égales est définie selon :

$$S = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{2\pi\hat{f}_d(0)}{T}}} \quad (5.2)$$

avec  $\hat{f}_d(0)$  un estimateur cohérent de  $f_d(0)$ . On estime  $\hat{f}_d(0)$  en utilisant la procédure de Jarrow et al. (2007), soit l'estimateur de Newey et West (1987) avec un lag  $q$  équivalent à 40. Alors, on rejette l'hypothèse nulle d'erreurs de tarification identique si  $|S| > 1,96$ .

Les statistiques Diebold-Mariano (DM) sont présentées au tableau 5.7. Tout d'abord, on remarque que les modèles plus complets impliquent des erreurs de tarification moindres une semaine hors échantillon, mais les relations ne sont pas toutes significatives. Ensuite, on remarque pour la catégorie des modèles de marché un comportement distinct. En effet, on observe que les modèles de marché plus complet impliquent des erreurs de tarification moindre pour les caps en jeu et de longues échéances. Ce phénomène peut être illustré en remarquant au tableau 5.7, les statistiques DM négatives et significatives dans la matrice triangulaire supérieure du panel B et C. Excepté l'échéance 2 ans et le taux d'exercice 7% du panel B, aucun des modèles de marché plus complet n'arrive à diminuer significativement les erreurs de tarification des caps hors jeu de court terme. Aussi, on constate que le modèle SABR performe mieux que le modèle LM-DD, et ce pour presque toutes les échéances et les taux d'exercice, ce qui est en accord avec les multiples calibrations du modèle SABR.

Bref, l'analyse de la performance de tarification permet d'affirmer qu'un négociateur doit absolument tenir compte de l'effet du *smile* de volatilité, s'il désire élaborer des stratégies de tarification cohérente. Par ailleurs, notre analyse empirique de la performance de tarification démontre la difficulté des modèles étudiés à prédire correctement le prix des caps hors jeu et spécifiquement ceux de court terme. Même le modèle SABR, qui est calibré pour chaque échéance, éprouve de sérieuses difficultés à tarifier les caps hors jeu. Nos résultats empiriques corroborent ceux obtenus par Li et Zhao (2006) et Jarrow et al. (2007), qui constatent que leurs modèles respectifs tarifent inadéquatement les caps

Tableau 5.7

**Comparaison de la Performance de Tarification des Modèles**

Ce tableau présente les statistiques Diebold-Mariano (DM). Les statistiques DM sont calculées à partir de l'équation (5.2) avec l'estimateur de Newey et West (1987) avec un lag  $q$  de 40. Les statistiques DM suivent asymptotiquement une loi normale sous l'hypothèse nulle d'erreurs de tarification égales. Pour la catégorie des modèles de marché, une statistique DM négative indique que le modèle plus complet a des erreurs de tarifications moindres. On compare aussi le modèle SABR avec le plus performant des modèles de la catégorie des modèles de marché. Les termes en gras indiquent que les statistiques DM sont significantes à 5%.

Modèles	Stats DM					
Panel A : Statistiques DM pour la performance globale des modèles						
DD vs LMM	-1.5490					
LM-DD vs DD	-1.2385					
SABR vs LM-DD	<b>-4.7815</b>					
Taux d'exercice	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans
Panel B : DM entre DD et LMM						
1,5%	-1.87	-1.83	-1.88	<b>-2.03</b>	<b>-2.26</b>	<b>-2.52</b>
2%	-1.84	-1.86	<b>-1.97</b>	<b>-2.19</b>	<b>-2.47</b>	<b>-2.77</b>
3%	-1.90	<b>-2.07</b>	<b>-2.32</b>	<b>-2.66</b>	<b>-3.08</b>	<b>-3.51</b>
4%	<b>-1.98</b>	<b>-2.37</b>	<b>-2.67</b>	<b>-3.05</b>	<b>-3.47</b>	<b>-3.81</b>
5%	-1.73	-1.93	-1.72	-1.53	-1.31	-1.04
6%	0.95	1.71	0.68	<b>2.00</b>	<b>2.93</b>	<b>3.58</b>
7%	<b>2.53</b>	0.64	-0.15	-0.01	0.73	1.04
Panel C : DM entre LM-DD et DD						
1,5%	-0.18	-1.92	<b>-2.62</b>	<b>-2.74</b>	<b>-2.79</b>	<b>-2.66</b>
2%	-0.74	<b>-2.29</b>	<b>-3.01</b>	<b>-3.13</b>	<b>-3.13</b>	<b>-2.94</b>
3%	<b>-2.34</b>	<b>-3.06</b>	<b>-3.84</b>	<b>-3.54</b>	<b>-3.23</b>	<b>-2.92</b>
4%	-0.28	-0.47	-1.29	-1.87	<b>-2.26</b>	<b>-2.61</b>
5%	0.46	1.66	1.05	0.33	-0.44	-1.23
6%	-1.93	0.52	<b>2.40</b>	0.86	-1.20	<b>-2.14</b>
7%	-0.60	-0.09	1.65	<b>2.57</b>	0.21	-1.36
Panel D : DM entre SABR et LM-DD						
1,5%	-1.75	<b>-1.97</b>	<b>-2.15</b>	<b>-2.52</b>	<b>-2.85</b>	<b>-3.11</b>
2%	-1.79	<b>-2.23</b>	<b>-2.55</b>	<b>-2.92</b>	<b>-3.28</b>	<b>-3.59</b>
3%	-1.84	<b>-2.64</b>	<b>-2.88</b>	<b>-3.17</b>	<b>-3.55</b>	<b>-3.91</b>
4%	<b>-3.03</b>	<b>-3.86</b>	<b>-3.57</b>	<b>-3.69</b>	<b>-3.96</b>	<b>-4.24</b>
5%	<b>-3.95</b>	<b>-4.09</b>	<b>-3.65</b>	<b>-3.66</b>	<b>-3.66</b>	<b>-3.61</b>
6%	<b>-3.71</b>	<b>-4.71</b>	<b>-4.56</b>	<b>-4.57</b>	<b>-4.69</b>	<b>-4.49</b>
7%	<b>-2.73</b>	<b>-3.61</b>	<b>-3.95</b>	<b>-4.62</b>	<b>-4.18</b>	<b>-3.90</b>

hors jeu. D'ailleurs, une solution pour résoudre cette incapacité à bien cerner le prix des caps hors jeu serait l'inclusion de sauts largement négatifs tels que proposés par Jarrow et al. (2007). Aussi, on peut conclure que si on s'intéresse uniquement à la tarification de dérivés sur taux d'intérêt qui n'implique pas la connaissance de la corrélation entre les taux forward ou qui ne nécessite pas la connaissance de l'évolution à travers le temps de ces mêmes taux forward comme les caps, il serait préférable d'utiliser le modèle SABR pour tarifier ce type de dérivés. Un négociateur téméraire ne respectant pas les limites du modèle SABR, en tentant de tarifier plusieurs options de différentes échéances, pourrait être sujet à des opérations d'arbitrage.

### 5.2.3 Performance de couverture

Telle que l'évoquent Gupta et Subrahmanyam (2005) et Li et Zhao (2006), l'évaluation de la performance de tarification étudie la capacité d'un modèle à bien reproduire la distribution terminale d'un taux forward à l'échéance d'un caplet. En revanche, l'analyse de la performance d'opérations d'arbitrage en couverture dévoile à quel point un modèle est capable de cerner la dynamique de l'évolution d'un taux forward.

Le calcul de l'efficacité des opérations d'arbitrage en couverture se fonde sur la méthodologie employée dans les études empiriques antérieures, telles Longstaff et al. (2001), Fan et al. (2003), Gupta et Subrahmanyam (2005) Gupta et Subrahmanyam (2005), et Li et Zhao (2006). Précisément, en se basant sur les paramètres estimés et la formule analytique du delta d'un modèle quelconque à une date  $T_i$ , on détermine le ratio de couverture d'un caplet par rapport à notre instrument de couverture, soit une obligation zéro-coupon de même échéance<sup>36</sup> et on construit le portefeuille delta-neutre requis. En procédant ainsi, on couvre toutes les dates de paiements d'un cap, une technique de couverture appelée *bucket hedging*. L'opération d'arbitrage en couverture

---

36. Il peut être démontré qu'un caplet équivaut à une option de vente sur une obligation zéro-coupon. On réfère aux ouvrages de Brigo et Mercurio (2006) ou Martellini et al. (2003) pour une preuve formelle.

d'un cap correspondra simplement à la somme des positions individuelles des caplets compris dans le cap. Ensuite, on calcule les erreurs de couverture en soustrayant le changement dans le portefeuille de couverture de  $T_i$  à  $T_i + \tau$  de la variation dans le prix du cap durant cette même période. On considère une période de couverture  $\tau$  équivalente à une semaine.

Toutefois, une complication majeure survient lorsqu'on tente d'effectuer nos tests de couverture, puisqu'on n'observe pas le prix d'un cap une semaine plus tard. Afin d'illustrer ce problème, on s'inspire d'un exemple présenté par Gupta et Subrahmanyam (2005). Supposons un cap d'échéance 2 ans coté à une date  $T_i$  et couvert à cette même date  $T_i$ . L'évaluation de la performance de couverture à une date  $T_{i+1\text{semaine}}$  nécessite le prix du cap d'échéance 2 ans moins 1 semaine. Cependant, le marché cote uniquement le prix d'un nouveau cap d'échéance 2 ans. D'ailleurs, ce problème est inhérent à la majorité des dérivés sur taux d'intérêt qui se négocient selon une période d'échéance fixe plutôt qu'une date d'échéance spécifique. Pour surmonter ce problème, on s'appuie sur les études empiriques antérieures, telles que Collin-Dufresne et Goldstein (2002), Fan et al. (2003), et Li et Zhao (2006), et on interpole linéairement en regard de l'échéance le prix du cap une semaine plus tard. Évidemment, le prix du cap dépendra de la méthode d'interpolation, mais Li et Zhao (2006) considèrent plusieurs types d'interpolation et arrivent aux mêmes conclusions.

On mesure l'efficacité des opérations d'arbitrage en couverture par un ratio de variance, une méthode éprouvée et utilisée dans les articles de Longstaff et al. (2001) et Li et Zhao (2006)<sup>37</sup>. Formellement, si  $e$  représente la variation du prix d'un cap de  $T_i$  à  $T_i + \tau$  et que  $e^+$  désigne le changement du prix d'un cap durant la même période auquel on soustrait le changement dans le portefeuille de réplique, on définit la mesure de performance de couverture selon  $\frac{Var(e^+)}{Var(e)}$ . Cette mesure, telle que l'expliquent Li et Zhao (2006), correspond essentiellement au  $R^2$  de l'opération d'arbitrage en couverture. Les ratios de variance pour tous les modèles, toutes les échéances et tous les taux d'exercice

---

37. Fan et al. (2003) considèrent les erreurs quadratiques moyennes de couverture, car leurs erreurs de couverture comportent des biais considérables. Des tests numériques sur notre échantillon permettent de constater que les biais sont faibles.

sont présentés au tableau 5.8.

Premièrement, on remarque qu'indépendamment du modèle utilisé, les ratios de variance pour toutes les échéances et tous les taux d'exercice sont très similaires. En effet, ce comportement vient confirmer les résultats de Driessen et al. (2003) qui constatent que le *bucket hedging* permet d'éliminer les disparités entre les modèles. Il semble que l'utilisation d'un large éventail d'instruments de couverture permet d'éliminer les caractéristiques inhérentes aux modèles, qui sont utilisés pour le calcul des deltas. Par exemple, le modèle SABR de la classe des modèles à volatilité stochastique performe de façon presque identique à un modèle à volatilité locale, un comportement qui semble théoriquement incohérent selon Hagan et al. (2002). Deuxièmement, bien que la formule (3.10) donne des résultats légèrement supérieurs à la formule (3.9), les différences sont peu significatives. L'utilisation du *bucket hedging* vient possiblement éliminer les bienfaits de l'utilisation de la formule de Bartlett (2006). Troisièmement, on observe une piètre performance de couverture pour les caps court terme hors jeu et ATM. Comme l'indique Li et Zhao (2006), le comportement des caps en jeu évolue plutôt comme l'obligation zéro-coupon sous-jacente tandis que les caps ATM et hors jeu dépendent plus des moments d'ordre supérieur à 2 et possiblement des queues de la distribution des obligations zéro-coupon sous-jacente. Une autre piste de solution pourrait être la présence de facteurs idiosyncratiques liés à la volatilité qui influencent le marché des caps.

Afin d'étudier plus en détail la performance de couverture, mais aussi appuyer les résultats obtenus pour évaluer la performance de tarification, on effectue une régression linéaire du changement du prix des caps contre les changements des composantes principales de niveau, de pente et de courbure selon la méthodologie employée par Li et Zhao (2006). Les résultats de cette régression sont présentés au tableau 5.9.

Les résultats de cette régression permettent de mettre en évidence que les trois composantes principales expliquent une grande partie des changements dans le prix des caps en jeu, mais ce pouvoir explicatif diminue significativement à mesure que l'on se déplace vers les taux d'exercices hors jeu. Comme on

Tableau 5.8

**Performance de Couverture des Modèles**

Ce tableau présente la performance de couverture des modèles étudiés par un ratio de variance, soit la variation d'une position non couverte qui peut être diminuée par l'implantation d'opérations d'arbitrage en couverture. Formellement, si  $e$  représente la variation du prix d'un cap de  $T_i$  à  $T_i + \tau$  et que  $e^+$  désigne le changement du prix d'un cap durant la même période auquel on soustrait le changement dans le portefeuille de réplcation, on définit la mesure de performance de couverture selon  $\frac{Var(e^+)}{Var(e)}$ . On utilise une méthode de *bucket hedging*, soit une obligation zéro-coupon sous-jacente, qui représente l'instrument de couverture, pour chaque date de paiement d'un cap. La fréquence de couverture  $\tau$  est de une semaine. La période d'analyse est de 252 semaines (9 janvier 2004 au 31 octobre 2008).

Taux d'exercice	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans
Panel A : Performance de couverture du modèle LMM						
1,5%	0.719	0.817	0.851	0.862	0.861	0.847
2%	0.701	0.806	0.841	0.849	0.844	0.825
3%	0.587	0.744	0.788	0.798	0.791	0.767
4%	0.212	0.567	0.662	0.691	0.687	0.658
5%	0.149	0.180	0.395	0.457	0.449	0.401
6%	0.282	0.400	0.404	0.381	0.303	0.207
7%	0.334	0.294	0.269	0.228	0.109	0.029
Panel B : Performance de couverture du modèle DD						
1,5%	0.705	0.807	0.845	0.859	0.862	0.853
2%	0.676	0.789	0.831	0.844	0.846	0.835
3%	0.571	0.729	0.779	0.796	0.798	0.784
4%	0.220	0.565	0.662	0.695	0.699	0.679
5%	0.144	0.200	0.411	0.477	0.479	0.444
6%	0.266	0.405	0.424	0.411	0.352	0.275
7%	0.316	0.333	0.326	0.296	0.205	0.096
Panel C : Performance de couverture du modèle LM-DD						
1,5%	0.707	0.810	0.849	0.864	0.870	0.865
2%	0.683	0.797	0.839	0.854	0.859	0.851
3%	0.578	0.737	0.788	0.807	0.812	0.801
4%	0.217	0.566	0.666	0.702	0.710	0.693
5%	0.170	0.181	0.399	0.472	0.483	0.454
6%	0.270	0.412	0.441	0.435	0.389	0.322
7%	0.308	0.330	0.337	0.322	0.251	0.159
Panel D : Performance de couverture du modèle SABR avec la formule (3.9)						
1,5%	0.707	0.809	0.848	0.861	0.865	0.856
2%	0.679	0.793	0.834	0.847	0.849	0.836
3%	0.573	0.731	0.780	0.793	0.791	0.771
4%	0.241	0.576	0.664	0.689	0.683	0.653
5%	0.182	0.186	0.383	0.441	0.435	0.390
6%	0.238	0.389	0.402	0.390	0.340	0.271
7%	0.327	0.354	0.341	0.324	0.266	0.191
Panel E : Performance de couverture du modèle SABR avec la formule (3.10)						
1,5%	0.711	0.812	0.850	0.865	0.871	0.865
2%	0.687	0.798	0.839	0.854	0.858	0.850
3%	0.586	0.739	0.788	0.807	0.813	0.802
4%	0.254	0.581	0.673	0.709	0.718	0.703
5%	0.229	0.258	0.442	0.506	0.519	0.498
6%	0.284	0.422	0.439	0.444	0.420	0.380
7%	0.322	0.361	0.360	0.355	0.320	0.272

Tableau 5.9

### Régression sur les Facteurs Idiosyncratiques liés à la Volatilité dans le Marché des Caps.

Ce tableau présente les coefficients de détermination  $R^2$  résultants d'une régression linéaire entre les variations hebdomadaires du prix des caps et les variations hebdomadaires des trois composantes principales (niveau, pente, courbure). La période d'analyse est de 252 semaines (9 janvier 2004 au 31 octobre 2008).

	Échéance (en années)					
Taux d'exercice	2	3	4	5	6	7
1,5 %	0.8747	0.9312	0.9613	0.9745	0.9803	0.9766
2 %	0.8662	0.9231	0.9523	0.9634	0.9651	0.9570
3 %	0.7948	0.8682	0.9003	0.9092	0.9049	0.8897
4 %	0.6410	0.7561	0.8028	0.8134	0.8003	0.7749
5 %	0.4555	0.5973	0.6415	0.6475	0.6258	0.5921
6 %	0.2832	0.4006	0.4179	0.4143	0.3894	0.3587
7 %	0.1878	0.2785	0.2838	0.2806	0.2540	0.2253

a préalablement mentionné, ce phénomène s'explique en partie parce que les caps en jeu se comportent comme les obligations zéro-coupon sous-jacentes. Ainsi, comme le démontre le Tableau 4.1, empiriquement la totalité de la variation des prix des obligations zéro-coupon s'explique par seulement trois facteurs. Par contre, la piètre performance des trois facteurs à expliquer les changements dans le prix des caps hors jeu peut être attribuée à la présence de facteurs idiosyncratiques liés à la volatilité. Il est donc possible de spéculer sur la présence de risque lié à la volatilité qui influence le marché des caps, mais n'affecte pas directement les taux d'intérêt. Par ailleurs, cette régression vient nous éclairer sur la piètre performance des modèles utilisés dans cette recherche à bien couvrir les risques associés aux caps hors jeu. Pour remédier à ce problème, Li et Zhao (2006) proposent d'utiliser un cadre d'analyse HJM pour tarifier et couvrir les risques des caps, car cette catégorie de modèle permet d'explicitement introduire des facteurs supplémentaires.

Bref, les résultats de la performance des opérations d'arbitrage en couverture permettent de faire quelques conclusions intéressantes. Premièrement, l'utilisation d'un instrument de couverture pour chaque date de paiement d'un cap, soit le *bucket hedging*, permet d'éliminer les disparités à bien cerner le *smile* de volatilité. Deuxièmement, tous les modèles étudiés dans cette recherche éprouvent de sérieuses difficultés à diminuer significativement la variance des

erreurs de couverture pour les caps hors jeu et ATM. Troisièmement, on peut affirmer qu'il semble y avoir la présence de facteurs idiosyncratiques liés à la volatilité qui influencent le prix des caps, ce qui empêche l'élaboration d'opérations d'arbitrage en couverture pour les caps hors jeu et ATM cohérente.

Par ailleurs, il semble pertinent de s'interroger sur la nécessité d'un modèle à répliquer exactement le prix de toutes les options disponibles. Il pourrait être plus utile de comprendre pourquoi les acteurs du marché des caps définissent le prix des caps hors jeu ainsi plutôt que de tenter de faire assimiler à un modèle quelconque le maximum d'information possible.



# Chapitre 6

## Conclusion

Dans cette recherche, on a exploré la performance de tarification et de couverture de quelques modèles tentant de modéliser explicitement le *smile* de volatilité présent dans le marché des dérivés sur taux d'intérêt de type cap. Tout d'abord, on a énuméré les caractéristiques des modèles tout en motivant leur choix en exposant leurs principales qualités et leurs principaux défauts. On a démontré, dans un second temps, comment calibrer les modèles sur les données de taux LIBOR, les contrats Eurodollars, les taux swaps et les caps en contexte américain.

Notre analyse indique clairement que la modélisation du *smile* de volatilité est un rouage fondamental pour la mise en place d'opérations de tarification et de couverture cohérente. Bien que tous les modèles éprouvent de la difficulté à bien cerner le mouvement des prix des caps hors jeu et spécifiquement ceux à court terme, les modèles explicitement conçus pour modéliser une variété de structure de *smile* de volatilité performant mieux que les autres modèles et semble générer un biais moindre. Aussi, notre analyse démontre que l'utilisation d'une stratégie de couverture où il y a présence d'une multitude d'instruments de couverture permet d'éliminer les disparités à bien modéliser le *smile* inhérentes aux modèles. De plus, notre analyse souligne les difficultés éprouvées par tous les modèles étudiés à bien couvrir les risques des caps hors jeu et ATM. Par ailleurs, il semble y avoir la présence de facteurs idiosyncra-

tiques liés à la volatilité qui influencent le prix des caps et vient dégrader la performance de tarification et de couverture.

Les pistes à explorer pour les recherches ultérieures sont nombreuses. Tout d'abord, il serait intéressant de constater l'effet d'introduire de l'optionnalité dans les stratégies de couverture. En effet, couvrir les risques de delta et de gamma par exemple pourrait possiblement s'avérer une stratégie plus efficace. D'ailleurs, aucun article dans la littérature existante ne s'est penché sur ce problème. Ensuite, il serait pertinent de comparer plus de modèles de la catégorie des modèles à volatilité stochastique avec d'autres modèles de plusieurs catégories dont spécifiquement les modèles avec sauts, qui selon Jarrow et al. (2007) sont essentiels pour bien cerner le comportement des caps à court terme. Aussi, récemment, plusieurs auteurs dont Rebonato et al. (2009) ont tenté de jumeler la capacité du modèle SABR à reproduire le *smile* de volatilité et la rigueur théorique du modèle de marché. Il serait donc intéressant d'éprouver la performance de ces modèles hybrides étant donné l'acceptation universelle du modèle de marché et du modèle SABR.

# Bibliographie

- C. Alexander. Common correlation and calibrating the lognormal forward rate model. *Wilmott Magazine*, pages 2–12, March/April 2003.
- C. Alexander. *Market Risk Analysis : Pricing, Hedging and Trading Financial Instruments*. John Wiley & Sons, 2008.
- L. Andersen et J. Andreasen. Volatility skews and extensions of the LIBOR market model. *Applied Mathematical Finance*, 7 :1–32, 2000.
- L. Andersen et R. Brotherton-Ratcliffe. Extended LIBOR market models with stochastic volatility. *Journal of Computational Finance*, 9(1) :1–40, 2005.
- B. Bartlett. Hedging under SABR model. *Wilmott Magazine*, pages 2–4, July/August 2006.
- F. Black. The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2) :167–179, 1976.
- F. Black et P. Karasinski. Bond and option pricing when short rates are lognormal. *Financial Analysts Journal*, 47(4) :52–59, July-August 1991.
- F. Black et M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3) :637–654, 1973.
- F. Black, E. Derman, et W. Toy. A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, 46 :33–39, 1990.

- A. Brace, D. Gatarek, et M. Musiela. The market model of interest rate dynamics. *Mathematical Finance*, 7(2) :127–155, 1997.
- D. Brigo et F. Mercurio. Fitting volatility smiles with analytically tractable asset price models. Internal report, Banca IMI, 2000a.
- D. Brigo et F. Mercurio. A mixed-up smile. *Risk*, 13(9) :123–126, September 2000b.
- D. Brigo et F. Mercurio. Lognormal-mixture dynamics and calibration to market volatility smiles. *International Journal of Theoretical & Applied Finance*, 5(4) :427–446, 2002.
- D. Brigo et F. Mercurio. Analytical pricing of the smile in a forward LIBOR market model. *Quantitative Finance*, 3(1) :15–27, 2003.
- D. Brigo et F. Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit*. Springer, 2nd edition, September 2006.
- D. Brigo, F. Mercurio, et G. Sartorelli. Alternative asset-price dynamics and volatility smile. *Quantitative Finance*, 3(3) :173–183, 2003.
- G. Burghardt et W. Hoskins. The convexity bias in eurodollar futures. Technical report, Dean Witter Institutional Futures Research Note, 1994.
- I. Chuang et P. Ritchken. Interest rate option pricing with volatility humps. *Review of Derivatives Research*, 3 :237–262, 1999.
- P. Collin-Dufresne et R. Goldstein. Do bonds span the fixed income markets? theory and evidence for unspanned stochastic volatility. *Journal of Finance*, 57(4) :1685–1730, 2002.
- J.C. Cox et S.A. Ross. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3 :145–166, 1976.
- J.C. Cox, J.E. Ingersoll, et S.A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2) :385–407, March 1985.
- E. Derman et I. Kani. Riding on a smile. *Risk*, 7(2) :32–39, February 1994.

- E. Derman et I. Kani. Stochastic implied trees : Arbitrage pricing with stochastic term and strike structure of volatility. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1(1) :61–110, 1998.
- F.X. Diebold et R.S. Mariano. Comparing predictive accuracy. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3) :252–263, 1995.
- J. Driessen, P. Klaassen, et B. Melenberg. The performance of multi-factor term structure models for pricing and hedging caps and swaptions. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 38(3) :635–672, September 2003.
- J. Duarte. The causal effect of mortgage refinancing on interest rate volatility : Empirical evidence and theoretical implications. *Review of Financial Studies*, 21(4) :1689–1731, July 2008.
- B. Dupire. Pricing with a smile. *Risk*, 7(1) :18–20, January 1994.
- B. Dupire. Pricing and hedging with smiles. In M.A. H. Dempster et S. R. Pliska, editors, *Mathematics of Derivative Securities*, pages 103–111. Cambridge University Press, 1997.
- A. Estrella et G. Hardouvelis. The term structure as a predictor of real economic activity. *Journal of Finance*, 46(2) :555–576, June 1991.
- A. Estrella et F. Mishkin. The yield curve as a predictor of u.s. recessions. *Current Issues in Economics and Finance* (2) 7, Federal Bank of New York, June 1996.
- A. Estrella et M. Trubin. The yield curve as a leading indicator : Some practical issues. *Current Issues in Economics and Finance* (12) 5, Federal Bank of New York, July/August 2006.
- R. Fan, A. Gupta, et P. Ritchken. Hedging in the possible presence of unspanned stochastic volatility : Evidence from swaption markets. *Journal of Finance*, 58(5) :2219–2248, 2003.

- R. Fan, A. Gupta, et P. Ritchken. On pricing and hedging in the swaption market : How many factors, really ? *Journal of Derivatives*, 15(1) :9–33, Fall 2007.
- P. Glasserman et S.G. Kou. The term structure of simple forward rates with jump risk. *Mathematical Finance*, 13(3) :383–410, 2003.
- A. Gupta et M. Subrahmanyam. Pricing and hedging interest rate options : Evidence from cap-floor markets. *Journal of Banking & Finance*, 29(3) : 701–733, March 2005.
- P. Hagan et M. Konikov. Interest rate volatility cube : Construction and use. Technical report, Bloomberg, July 2004.
- P. Hagan et G. West. Interpolation methods for curve construction. *Applied Mathematical Finance*, 13(2) :89–129, June 2005.
- P. Hagan, D. Kumar, A. Lesniewski, et D. Woodward. Managing smile risk. *Wilmott Magazine*, pages 84–108, September 2002.
- D. Heath, R. Jarrow, et A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates : A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60(1) :77–105, 1992.
- M. Heidari et L. Wu. Are interest rate derivatives spanned by the term structure of interest rates ? *The Journal of Fixed Income*, 13(1) :75–86, June 2003.
- L. Hentschel. Errors in implied volatility estimation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 38(4) :779–810, 2003.
- S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2) :327–343, 1993.
- T.S.Y Ho et S.-B. Lee. Term structure movements and the pricing of interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41 :1011–1029, December 1986.

- J.C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall, 6th edition, June 2005.
- J.C. Hull et A. White. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42(2) :281–300, June 1987.
- J.C. Hull et A. White. Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*, 3(4) :573–92, 1990.
- J.C. Hull et A. White. Numerical procedures for implementing term structure models II : Two-factor models. *The Journal of Derivatives*, 2(2) :37–48, Winter 1994.
- J.C. Hull et A. White. Forward rate volatilities, swap rate volatilities, and the implementation of the LIBOR market model. *Journal of Fixed Income*, 10(3) :46–62, September 2000.
- J.C. Hull et A. White. The general hull-white model and supercalibration. *Financial Analysts Journal*, 57(6) :34–43, November/December 2001.
- R. Jagannathan, A. Kaplin, et S. Sun. An evaluation of multi-factor CIR models using LIBOR, swap rates, and cap and swaption prices. *Journal of Econometrics*, 116(1-2) :113–146, September-October 2003.
- F. Jamshidian. LIBOR and swap market models and measures. *Finance and Stochastics*, 1(4) :293–330, 1997.
- R. Jarrow, H. Li, et F. Zhao. Interest rate caps "smile" too!; but can the LIBOR market models capture the smile? *Journal of Finance*, 62(1) :345–382, 2007.
- P. Jäckel et A. Kawai. The future is convex. *Wilmott Magazine*, pages 2–13, February 2005.
- M. Joshi et R. Rebonato. A stochastic-volatility, displaced-diffusion extension of the LIBOR market model. *Quantitative Finance*, 3 :458–469, 2003.
- B. Jourdain. Loss of martingality in asset price models with lognormal stochastic volatility. Working paper, ENPC-CERMICS, 2004.

- G. Kirikos et D. Novak. Convexity conundrums. *Risk*, 10(3) :60–61, March 1997.
- J. Labuszewski et R. Co. *The CME Group Risk Management Handbook : Products and Applications*, chapter Eurodollar Futures : Interest Rate Market Building Blocks, pages 169–230. Wiley, 2010.
- H. Li et F. Zhao. Unspanned stochastic volatility : Evidence from hedging interest rate derivatives. *Journal of Finance*, 61(1) :341–378, 2006.
- F. Longstaff, P. Santa-Clara, et E. Schwartz. The relative valuation of caps and swaptions : Theory and empirical evidence. *Journal of Finance*, 56(6) : 2067–2109, December 2001.
- F.A. Longstaff et E.S. Schwartz. A two-factor interest rate model and contingent claims valuation. *The Journal of Fixed Income*, 2(3) :16–23, December 1992.
- A. Malz. Estimation of zero-coupon curves in datametrics. *RiskMetrics Journal*, 3(1) :27–39, 2002.
- D.G.H. Marris. *Financial option pricing and skewed volatility*. PhD thesis, Statistical Laboratory, University of Cambridge, 1999.
- L. Martellini, P. Priaulet, et S. Priaulet. *Fixed-Income Securities : Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies*. John Wiley & Sons, 2003.
- R.C. Merton. The relationship between put and call option prices : Comment. *Journal of Finance*, 28(1) :183–84, March 1973a.
- R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics*, 4 (1) :141–183, Spring 1973b.
- K.R. Miltersen, K. Sandmann, et D. Sondermann. Closed form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates. *Journal of Finance*, 52(1) :409–30, 1997.
- P. Miron et P. Swannell. *Pricing and Hedging Swaps*. Euromoney Books, 1991.



- J.M. Moraleda et A. Pelsser. Forward versus spot interest rate models of the term structure an empirical comparison. *The Journal of Derivatives*, 7(3) : 9–21, Spring 2000.
- M. Musiela et M. Rutkowski. Continuous-time term structure models : Forward measure approach. *Finance and Stochastics*, 1(4) :261–291, 1997.
- C.R. Nelson et A.F. Siegel. Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, 60(4) :473–489, 1987.
- W.K. Newey et K.D. West. A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *Econometrica*, 55(3) :703–708, May 1987.
- J. Oblój. Fine-tune your smile : Correction to Hagan et al. *Wilmott Magazine*, pages 102–104, May/June 2008.
- L. Paulot. Asymptotic implied volatility at the second order with application to the SABR model. *eprint arXiv :0906.0658*, June 2009.
- V. Piterbarg. Stochastic volatility model with time-dependent skew. *Applied Mathematical Finance*, 12(2) :147–185, June 2005.
- R. Rebonato. *Modern Pricing of Interest Rate Derivatives : The LIBOR Market Model and Beyond*. Princeton University Press, 2002.
- R. Rebonato. *Volatility and Correlation : The Perfect Hedger and the Fox*. Wiley Finance, 2nd edition, 2004.
- R. Rebonato. A time-homogeneous, SABR-consistent extension of the LMM : Calibration and numerical results. *Risk*, November 2007.
- R. Rebonato et R. White. Linking caplets and swaptions prices in the LMM-SABR model. *The Journal of Computational Finance*, Winter 2009.
- R. Rebonato, K. McKay, et R. White. *The SABR/LIBOR Market Model : Pricing, Calibration and Hedging for Complex Interest-Rate Derivatives*. John Wiley & Sons, 2009.

- U. Ron. A practical guide to swap curve construction. Working Papers 00-17, Bank of Canada, August 2000.
- M. Rubinstein. Displaced diffusion option pricing. *Journal of Finance*, 38(1) : 213–217, March 1983.
- D. Smith. By the bootstraps. *Risk*, 3(6), June 1990.
- D. Smith. Techniques for deriving a zero coupon curve for pricing interest rate swaps : A simplified approach. In Avner S. Wolf, editor, *The Handbook of Interest Rate Risk Management*, chapter 20. Irwin Professional Pub, October 1993.
- E.M. Stein et J.C. Stein. Stock price distributions with stochastic volatility : An analytic approach. *Review of Financial Studies*, 4(4) :727–752, 1991.
- L. Svensson. Estimating and interpreting forward interest rates : Sweden 1992 - 1994. NBER Working Paper 4871, The National Bureau of Economic Research, September 1994.
- O. Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2) :177–188, 1977.
- G. West. Calibration of the SABR model in illiquid markets. *Applied Mathematical Finance*, 12(4) :371–385, December 2005.
- L. Wu et F. Zhang. LIBOR market model with stochastic volatility. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2(2) :199–227, May 2006.
- L. Wu et F. Zhang. Fast swaption pricing under the market model with a square-root volatility process. *Quantitative Finance*, 8(2) :163–180, March 2008.
- F. Zhou. The swap curve. Technical report, Lehman Brothers Fixed Income Research, 2002.