UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

PORTEFEUILLES TECHNOLOGIQUES, PORTEFEUILLES NATURELS ET OPTIONS RÉELLES

THÈSE PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN ÉCONOMIE

PAR
ILHEM KASSAR

Mai 2002

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier M. Pierre Lasserre, mon directeur de thèse, pour sa disponibilité, son soutien et ses conseils. Je lui suis très reconnaissante pour sa patience et la confiance qu'il m'a témoignées pendant toutes ces années.

Mes remerciements vont aussi aux membres de mon comité d'évaluation pour leurs commentaires et leur intérêt à mon travail, M. Max Blouin et M. Alain Guay tous deux professeurs à l'Université du Québec à Montréal et Mme Anne Épaulard du Fonds Monétaire International.

Je tiens, par ailleurs, à exprimer ma reconnaissance aux personnes qui m'ont entouré à l'UQAM pendant ces cinq années, pour leur soutien et amitié et en particulier Afifa.

Je ne saurais trop exprimer ma gratitude à ma famille et particulièrement à ma mère et feu mon père pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Je voudrais enfin remercier Nassef d'avoir toujours répondu présent, patient et encourageant, ainsi que pour tout le reste...

Résumé

Les trois essais de la thèse s'inscrivent dans le cadre de la théorie des options réelles. Le contexte général est celui de prises de décisions irréversibles dans un environnement incertain en présence d'options réelles multiples. L'étude s'intéresse particulièrement à des situations où les décisions d'investissement peuvent mener à la constitution de portefeuilles d'actifs et/ou d'options faisant ainsi ressortir l'opportunité d'une diversification. Comme on peut choisir la diversification d'un portefeuille, on peut décider de s'en départir et un exemple intéressant est le désinvestissement dans les ressources naturelles menant à la perte de la biodiversité.

Le premier essai analyse la décision de réaliser un investissement unique, lorsqu'une firme a le choix entre deux technologies de production dont les caractéristiques en terme de risque sont asymétriques. Dans le deuxième essai, nous donnons à la firme l'opportunité de faire plus qu'un investissement et donc nous lui conférons une option de spécialisation et une option de diversification technologique. L'évaluation d'un même projet (technologie) dépend de la composition courante du portefeuille de la firme en termes d'actifs réels et d'options et la structure technologique finale est généralement déterminée par l'histoire des réalisations de la valeur de l'actif sous-jacent à la décision d'investissement. Dans le dernier essai nous construisons un modèle où la biodiversité est évaluée à travers l'option de substitution entre ressources dans l'usage. Cette substituabilité, souvent considérée jusqu'ici comme justifiant l'abandon des espèces, constitue au contraire une source de valeur pour la diversité et une motivation pour sa conservation.

Table des matières

1 Introduction générale **1**

2 Investissement irréversible et choix technologique **7**

2.1 Introduction 7

2.2 Le modèle 10

2.2.1 Description du modèle 10

2.2.2 Modèle sans incertitude 13

2.2.3 Modèle avec incertitude 14

2.3 Analyse des résultats 21

2.3.1 La règle de décision 21

2.3.2 Impact de la volatilité 25

2.3.3 Effet d'une option d'abandon 31

2.4 Conclusion 33

2.5 Annexes 35

2.5.1 Annexe A :Détermination du seuil d'investissement dans le mod èle à une technologie 35

2.5.2 Annexe B : impact de la volatilité sur le seuil d'investissement dans la *tech C* 37

3 Choix de la diversification technologique dans un modèle d'options réelles 39

3.1 Introduction 39

3.2 Description du modèle et considérations préliminaires : 46

3.2.1 Présentation générale du modèle : 46

3.2.2 Résolution du problème d'investissement dans une seule technologie 49

3.2.3 Modèle avec deux technologies concurrentes 58

3.3 Détermination des fonctions de valeurs finales 60

3.3.1 Valeurs de la firme non diversifiée 60

3.3.2 Valeur de la firme technologiquement diversifiée : 60

3.4 Valeur de l'option d'investir pour une firme qui possède la technologie certaine 65

3.4.1 Évaluation de l'option d'expansion 66

3.4.2 Règle de décision pour l'exercice de l'option de spécialisation 67

3.4.3 Règle de décision pour l'exercice de l'option de diversification 68

3.4.4 Remarques complémentaires et récapitulation 69

3.5 Valeur de l'option d'investir pour une firme qui possède la technologie incertaine 71

3.5.1 Évaluation de l'option d'expansion : 71

3.5.2 Règle de décision pour l'exercice de l'option de diversification 72

3.5.3 Règle de décision pour l'exercice de l'option de spécialisation 73

3.5.4 Remarques complémentaires et récapitulation 73

3.6 Décision d'investissement dans la première unité de production 74

3.6.1 Le cas où $v_{ci} < c$ et $v_{ic} > c$ 75

3.6.2 Le cas $v_{ci} \geqslant c$ et $v_{ic} \leq c$ 78

3.7 Analyse des résultats 80

3.8 Résultats numériques 83

3.8.1 Impact de l'incertitude 87

3.8.2 Impact de la variation du taux d'escompte 88

3.8.3 Impact de la variation du coût de production de la technologie certaine 89
3.9 Conclusion . . . 91
3.10 Annexes . . . 94
3.10.1 Annexe A : propriétés des fonctions de valeurs finales . . . 94
3.10.2 Annexe B : conditions d'existence des valeurs d'arrêt v_{ic} et v_{cc} . . . 94
3.10.3 Annexe C : propriétés de la fonction de valeur $F(0,1,v)$ . . . 96
3.10.4 Annexe D : conditions d'existence des valeurs d'arrêt v_{ii} et v_{ci} . . . 97
3.10.5 Annexe E : propriétés de la fonction de valeur $F(1,0,v)$ . . . 99
3.10.6 Annexe F : conditions d'existence des valeurs d'arrêt v_i et v_c . . . 101
3.10.7 Annexe G : propriétés de la fonction de valeur $F(0,0,v)$ . . . 102
3.10.8 Annexe H : description de la méthode de résolution numérique . . . 103
3.10.9 Annexe I : effets des variations de σ, r et c sur les fonctions de valeur 109

4 Préservation des espèces et valeur de la biodiversité : une approche d'options réelles 111

4.1 Introduction . . . 111
4.2 Un modèle d'évaluation de la biodiversité . . . 119
4.3 Modèle simplifié . . . 122
4.4 Résolution de l'équation de Bellman . . . 125
4.5 Règle de décision . . . 127
4.6 Le passage de la dominance d'une espèce à l'autre . . . 128
4.7 Illustration et récapitulation . . . 131
4.8 La valeur marginale de la biodiversité . . . 133
4.9 Évaluation numérique de la biodiversité pour le modèle général . . . 138
4.9.1 Valeur d'une espèce en l'absence de biodiversité . . . 139
4.9.2 Résultats de l'évaluation numérique : . . . 140
4.10 Conclusion . . . 147

4.11 Annexes 149
4.11.1 Annexe A : valeur de l'espèce marginale 149
4.11.2 Annexe B : description de la méthode d'évaluation numérique 150
4.11.3 Annexe C : calcul des probabilités conditionnelles 153

5 Conclusion générale **157**

6 Bibliographie **159**

Table des figures

2.1 Décision d'investissement en certitude 14
2.2 Décision d'investissement et choix de la technologie 23
2.3 Investissement dans *tech I* ; avec et sans la technologie concurrente 25
2.4 Effet d'une variation à la hausse de σ^2 avec α constant 27
2.5 Effet d'une variation de σ^2 avec ajustement de tous les paramètres 29
2.6 Écart entre les seuils critiques en fonction de σ 30
2.7 Décision d'abandon 32
2.8 Effet de la hausse de σ^2 au voisinage de $\underline{v}$ 37
2.9 Effet de la hausse de σ^2 quand on s'éloigne de $\underline{v}$ 38

3.1 Marché du produit final 47
3.2 Décision d'investissement dans le cas d'une seule technologie 57
3.3 Valeur de la firme technologiquement diversifiée 64
3.4 Valeurs finales possibles du projet d'investissement 65
3.5 Décision d'investissement dans le cas où $v_{ic} < c < v_{ci}$ 79
3.6 Cas de figure I 81
3.7 Cas de figure II 83
3.8 Valeur de la firme technologiquement diversifiée 84
3.9 Investissement dans la $2^{ème}$ unité : firme productive avec *tech C* 84

3.10 Investissement dans la $2^{ème}$ unité : firme productive avec *tech I* 85
3.11 Investissement dans la $1^{ère}$ unité de production 86
3.12 Décisions d'investissement dans le cas de figure II 91
3.13 Effet d'une variation de la volatilité 109
3.14 Effet du taux d'actualisation 110
3.15 Effet d'un variation du co ût de production c 110

4.1 Décision de conservation : frontières critiques 131
4.2 Valeurs de l'espèce marginale 135
4.3 Effet d'une variation de k sur les frontières critiques 137
4.4 Effet d'une variation de σ^2 sur les frontières critiques 137
4.5 Décision de conservation : frontières critiques 141
4.6 Règles de décision avec les deux types de coût de conservation 143
4.7 Effet d'une variation de l'incertitude 144
4.8 Effet d'une corrélation positive. 145
4.9 Effet d'une corrélation négative 146
4.10 Décision de conservation avec corrélation parfaite positive 147

Chapitre 1

Introduction générale

Les décisions d'investissements réels sont des décisions cruciales, qui engagent l'investisseur, très souvent d'une manière irréversible et presque toujours dans un environnement incertain. La décision d'investissement comporte un engagement durable de l'entreprise dans un actif et restreint dans une certaine mesure l'ensemble de ses choix pour ses actions futures. L'investissement implique l'adaptation du capital acquis à l'usage propre de la firme donc sa transformation en un capital spécifique. Ce premier trait de l'investissement constitue la première source d'irréversibilité. La deuxième source est l'imperfection d'information sur les marchés secondaires. Ces deux réalités se traduisent par une asymétrie ou un écart entre les coûts d'investissement et les coûts de désinvestissement. L'entreprise ne peut donc se défaire d'un investissement impunément. Pour désinvestir elle doit payer un coût qui correspond à la partie non récupérable du coût d'investissement initial. Et le cas limite de l'irréversibilité est représenté par une situation où le désinvestissement entraîne des pertes infinies qui le rendent impossible.

Nous parlons d'effet irréversibilité lorsque l'irréversibilité de l'investissement est associée à une évolution de l'information dont disposent les décideurs sur les états présents et futurs de la nature. La dynamique de l'information est générée par des chocs qui per-

turbent l'environnement de l'entreprise. Les fluctuations de l'environnement sont source d'incertitude et les réalisations des chocs sont source d'information. Le coût économique de cet 'effet irréversibilité' correspond au prix que les décideurs sont prêts à payer pour garder la liberté de choix ou encore la flexibilité. Ce coût représente la valeur d'option d'une décision. Cette valeur demeure non nulle tant que la firme n'a pas fait un choix irréversible.

Le décideur doit donc arbitrer entre la valeur de l'opportunité de prendre la décision d'investissement dans l'immédiat et le coût associé à la perte de l'opportunité de prendre cette même décision à un meilleur moment. Cet arbitrage permet de faire l'analogie entre une décision d'investissement et l'exercice d'une option financière. En effet, une entreprise qui possède un projet d'investissement ou une opportunité d'investir, détient une option réelle qui lui donne le droit de réaliser une dépense d'investissement et de recevoir un certain actif en contrepartie.

L'incertitude est l'aléa associé à l'environnement externe et elle est prise comme un déterminant dans l'analyse d'options réelles. Les investisseurs ne peuvent pas l'influencer, par contre ils peuvent contrôler leur exposition à cette incertitude. En effet, à travers les actifs, l'incertitude externe est transformée en une incertitude sur la valeur de l'investissement et le risque sera la conséquence défavorable de cette exposition.

La théorie des options réelles emprunte les techniques d'évaluation des options financières pour la résolution de problèmes d'investissement irréversible. La littérature sur les modèles à valeur d'option réelle s'est beaucoup développée depuis les travaux de Bernanke (1983) et McDonald et Siegel (1985, 86). Les premiers modèles traitent le problème d'une firme qui a un projet d'investissement unique et qui doit décider de la date optimale de sa réalisation. À partir des travaux des auteurs déjà cités et de ceux de Dixit(1989, 91) et de Pindyck(1988, 91), ces modèles peuvent être décrits par une structure commune. L'irréversibilité de l'investissement prend une forme simple d'un coût fixe indépendant du volume de capital à installer. L'incertitude est introduite à travers des chocs continus sur

une variable déterminante pour la décision. Que ce soit une incertitude qui se rattache à la demande ou une incertitude reliée à l'exploitation, elle peut être résumée par une incertitude sur la valeur des flux de profits du projet. Cette dernière est modélisée comme une variable stochastique qui suit un processus de diffusion.

L'investissement n'est entrepris que lorsque la valeur actualisée du projet couvre la dépense initiale d'investissement et le coût économique de renoncer à la possibilité de reporter cette dépense. Ce deuxième terme de coût représente la valeur d'option nette du coût fixe nécessaire à son exercice. Ce coût d'opportunité correspond à la valeur actuelle nette des profits espérés de l'option, révisée à chaque instant en fonction de l'information nouvelle sur le flux de profits.

Dans ce modèle, le rendement requis pour investir est supérieur à celui du modèle standard sans effet irréversibilité. L'écart reflète la valeur de l'attente (report de la décision) qui permet de bénéficier de plus d'information sur la rentabilité espérée du projet.

L'étude de l'impact d'un accroissement de l'incertitude future sur le comportement du décideur mène à une conclusion importante. L'augmentation de la volatilité de la valeur du projet est accompagnée d'une augmentation de la valeur d'option. En d'autres termes, plus l'incertitude est forte et plus la valeur de l'attente est élevée, ce qui mène à retarder la date de réalisation du projet. L'incertitude ajoute de la valeur aux investissements car elle est créatrice d'opportunités ou d'options. Une option d'abandon ou une option de suspension par exemple, n'existent qu'en raison de l'incertitude reliée à la valeur des flux de profits futurs.

Les résultats de ce modèle apportent une explication à certains faits observés. Le premier fait est relié au comportement des entrepreneurs et se traduit par des taux de rendement exigés plus élevés que ceux réalisés sur les marchés financiers (Summers(1987)). Le deuxième fait se rapporte à l'évaluation des entreprises sur le marché. Beaucoup de firmes ont une valeur de marché qui ne trouve pas sa contrepartie dans leurs performances observées. Cette constatation peut être expliquée par la prise en compte de la valeur de

toutes les options qu'une entreprise possède : une détention de certains droits (concession, brevet...), une capacité propre de réaliser un projet, de répondre à une demande présente ou future.

Cette théorie a été initialement adoptée dans les travaux en ressources naturelles. Citons Paddock, Siegel et Smith (1988) qui assimilent les réserves de ressource naturelle dans un cadre incertain à une option sur l'extraction future de la ressource. Brennan et Schwartz (1985) prennent l'exemple d'une mine pour déterminer la valeur de ce projet et les stratégies optimales de développement, d'exploitation et d'abandon. Le champ d'application de la théorie des options réelles s'est avéré plus large comme le montrent plusieurs autres travaux. De nombreuses extensions ont été faites au modèle standard d'investissement irréversible en présence d'incertitude. McDonald et Siegel (1985) analysent la décision d'investissement dans un projet discret avec une option de suspension temporaire de la production lorsque le profit courant est négatif. Ces mêmes auteurs (1986) modélisent l'incertitude sur les bénéfices du projet et sur le coût d'investissement. Pindyck (1993) distingue entre deux types d'incertitude sur le coût d'un projet dont la réalisation s'étale dans le temps : incertitude technique qui n'est résolue qu'en entrepenant l'investissement et incertitude sur les prix des intrants qui est exogène à l'activité d'investissement de la firme. Pindyck montre que la décision d'investissement est affectée de manière différente par ces deux types d'incertitude. Dixit (1989) aborde les décisions d'entrée et de sortie et évalue simultanément cette option composée. Pindyck (1988) montre qu'en présence d'irréversibilité la capacité de production est plus faible et que la valeur de la firme est attribuable en grande partie à ses possibilités d'expansion. He et Pindyck (1992) traitent le problème de choix de technologie et de capacité de production dans un modèle où la firme peut produire deux biens pour lesquels la demande est stochastique.

Le présent travail s'intéresse à plusieurs facettes de l'investissement lorsque sa concrétisation implique un choix entre diverses options. On rencontre souvent ce type de décision dans les projets d'exploitation de ressources naturelles ou des projets contraints

par des normes environnementales, par exemple. Le progrès technologique et la diversité des systèmes de production font que les décideurs doivent choisir entre des technologies apportant des réponses différentes quant à la préservation de l'environnement et/ou à la gestion rationnelle et durable des ressources naturelles. Dans ce contexte, l'opportunité d'investissement s'assimile à un ensemble d'options réelles simultanées dont l'exercice est mutuellement exclusif.

Les trois essais de la thèse s'inscrivent dans ce cadre général et répondent par une approche d'options réelles à trois questions. Premièrement, nous analysons l'effet sur la règle de décision de la multiplicité d'options pour une opportunité d'investissement, avec incertitude asymétrique sur les valeurs des projets. Deuxièmement, nous formulons le problème de la diversification du risque par choix des technologies de production, en faisant le parallèle entre la constitution d'installations de production et celle d'un portefeuille d'actifs réels. Et troisièmement, nous adaptons la structure générale du problème de prise de décision irréversible en présence d'options diverses, pour la question de l'évaluation de la biodiversité et de la décision de désinvestissement dans ses ressources.

Dans le premier essai, nous trouvons que le choix de technologie dépend des valeurs relatives des options et que la flexibilité associée à leur multiplicité réduit l'investissement par rapport à chaque actif, effet accentué par toute augmentation de l'incertitude sur la valeur de l'une des options. Dans le second essai, nous montrons que l'évaluation d'un même projet dépend de la composition du portefeuille de la firme en termes d'actifs réels et d'options et que la diversification technologique stimule l'investissement. L'irréversibilité, en créant des délais dans les décisions d'investissements réels, est à l'origine de la divergence entre la constitution d'un portefeuille d'actifs réels et la sélection d'un portefeuille de titres financiers. Cependant, ces décisions sont comparables lorsque la valeur des projets est assez élevée pour éliminer les intervalles d'attente dans les investissements réels. Dans le dernier essai, nous appliquons la méthode des options réelles pour évaluer la biodiversité à travers l'option de substitution de ses ressources dans l'usage. Nous montrons aussi que

la substituabilité encourage la conservation de la biodiversité.

Chapitre 2

Investissement irréversible et choix technologique

2.1 Introduction

Souvent l'investisseur se trouve face à une décision qui met en cause différents projets interdépendants. L'interaction entre les projets peut prendre plusieurs formes (Childs, Ott et Triantis (1998)) : ils peuvent être des substituts partiels, complémentaires ou mutuellement exclusifs. Dans le cadre de la théorie des options réelles, Childs, Ott et Triantis (1998) étudient le cas d'exclusivité mutuelle où la firme peut investir dans l'étape de développement de deux projets mais ne peut réaliser qu'un seul. Ils montrent que le choix d'un développement parallèle ou séquentiel dépend des valeurs relatives des options associées à chacune de ces stratégies de développement et que l'ordre optimal pour le développement séquentiel ne commence pas toujours par le projet le plus profitable.

Herbelot (1992), dans sa thèse de doctorat, utilise l'approche d'options réelles pour étudier le problème des producteurs d'énergie électrique aux États Unis après les amendements apportés par le Clean Air Act. Pour se conformer à la nouvelle réglementation,

les producteurs ont le choix entre trois alternatives. Ils peuvent, soit acheter des droits d'émission de SO2 et continuer à émettre autant qu'avant, soit réduire leurs émissions de SO2 par un investissement irréversible. L'investissement implique le choix entre deux possibilités : adapter les installations existantes et remplacer l'utilisation de charbon à haute teneur en oxyde de soufre par du charbon à faible teneur en oxyde de soufre, ou bien installer un système pour filtrer les émissions de gaz. Herbelot montre qu'à cause de la flexibilité qu'ils procurent, l'achat de droits d'émission peut être préféré aux deux autres possibilités même si la valeur présente des coûts attendus s'avère plus élevée. Il montre aussi que le coût effectif de se conformer à la nouvelle réglementation est réduit par la valeur des deux options d'investissement détenues par le producteur. Epaulard et Gallon (2000) étudient la décision de construction d'un prototype nucléaire EPR[1] qui assurera une flexibilité future au niveau du choix de technologie de production électrique. Les auteurs trouvent que cette flexibilité peut justifier l'investissement dans la centrale de référence, qui est considéré comme l'achat d'une assurance contre les aléas touchant la technologie concurrente envisagée.

Nous nous intéressons à cette situation où l'investisseur possède une opportunité d'investissement renfermant plusieurs options mutuellement exclusives ex-post. Tant qu'il n'a pas investi, il a le choix entre différentes technologies de production disponibles. Au moment de la réalisation de l'investissement, ses options prennent les caractéristiques de projets mutuellement exclusifs. Il doit donc prendre une décision à double niveau : décider du moment optimal de s'engager dans un investissement irréversible et choisir la technologie de production optimale. Cette situation revêt plus d'intérêt, lorsque l'élément incertitude frappe asymétriquement les différentes technologies. L'investisseur doit, par exemple, choisir entre une technologie qui lui assure un flux de revenus futurs certains et une technologie qui est telle qu'il se trouve à opérer dans un environnement incertain.

[1] European Pressurized Reactor.

Dans ce travail, nous nous proposons d'analyser le comportement d'une firme qui opère sur le marché en utilisant des installations de production légères lui permettant de garder sa flexibilité et qui détient une opportunité d'investissement unique avec deux options pour sa réalisation. La première option lui donne la possibilité de faire une dépense fixe pour acquérir une capacité de production qui lui permet d'approvisionner son marché avec une quantité donnée d'output à un coût variable de production connu avec certitude. La deuxième option lui donne également la possibilité de recevoir des installations de production d'une capacité déterminée en contrepartie d'une mise de fonds initiale fixe non récupérable. Mais à la différence du premier type d'investissement, les coûts de production futurs dépendent d'une variable qui se réalise d'une manière aléatoire. En particulier nous voulons savoir comment la règle de décision (moment critique et choix de la technologie) est affectée par le fait que la firme a le choix entre deux actifs lorsqu'elle investit.

La disponibilité du choix entre les deux technologies réduit l'investissement relativement à chaque actif ; elle augmente la valeur de la flexibilité ex-ante. L'incertitude prolonge l'attente, même lorsque son effet global (direct et indirect) entraîne une baisse de la valeur d'option.

On rencontre une multiplicité de technologies de production dans plusieurs industries, notamment celle de l'énergie électrique. Il existe plusieurs sources de production : hydraulique, thermique, nucléaire et éolienne. Les projets d'investissement dans cette industrie impliquent l'engagement de montants considérables pour des actifs spécifiques. Les valeurs de ces projets sont incertaines et la majeure partie de l'incertitude trouve sa source dans les caractéristiques de la technologie de production i.e. la nature des intrants utilisés. Une centrale nucléaire a un coût d'investissement élevé et un coût de production faible et peu volatil. Par contre une centrale thermique fonctionnant au gaz est moins chère à construire mais caractérisée par des fluctuations importantes au niveau des coûts de production ; le prix du gaz est très volatil. Pour une centrale hydroélectrique, la variabilité des débits d'eau est la cause de fluctuations de la production ; ce que nous pouvons traduire en terme

d'incertitude sur le coût de production si le producteur doit recourir à quelque autre source pour assurer l'approvisionnement de son marché.

La construction d'une centrale nucléaire peut être considérée comme un projet sans risque, quant à la quantité et aux coûts, relativement à un investissement dans une centrale hydroélectrique ou à gaz ; si on fait abstraction des questions de sécurité. La disponibilité de ces technologies qui exposent la firme à différents degrés d'incertitude future, justifie à notre avis l'existence de situations où le choix entre projets d'investissement incertains et des projets relativement certains, s'impose.

Dans la section 2, nous développons le modèle et présentons sa résolution dans un cadre sans incertitude, puis dans un cadre incertain. La section 3 sera consacrée à l'analyse des résultats et la dernière à la conclusion.

2.2 Le modèle

2.2.1 Description du modèle

Considérons une firme produisant un certain bien final et qui doit approvisionner un marché où la demande Q est donnée. Nous ne nous intéressons pas à l'évolution du marché du produit final parce qu'il est commun à toutes les technologies et l'incertitude qui peut y trouver son origine affectera les valeurs des projets pareillement.

La firme sert déjà le marché par un système, que nous désignerons par technologie légère, qui ne fait intervenir aucune installation lourde nécessitant un investissement initial. La production est assurée par des installations légères et/ou par la sous-traitance. La firme conserve ainsi une flexibilité totale, dans le sens qu'elle peut arrêter toute activité sans subir aucun coût et qu'elle préserve la liberté d'action future en cas de changement dans son environnement. Cependant, elle doit payer un prix élevé pour garder sa flexibilité. En effet, qu'elle recoure à la sous-traitance ou produise elle-même, la firme supporte un coût élevé pour approvisionner le marché. Nous supposons que cette technologie légère induit

un coût constant $\bar{C}$.

La firme a une opportunité de procéder à un unique investissement consistant à installer une capacité de production Q, utilisant l'un des deux systèmes de production ou technologies disponibles.

La première technologie, technologie sans risque désignée par *tech C*, consiste à investir dans des installations de production ne comportant aucune incertitude, ni au niveau du coût d'investissement, ni ultérieurement au niveau des coûts variables de production. L'acquisition d'une capacité de production Q coûte un montant irrécupérable K relativement élevé. Nous faisons l'hypothèse que le coût variable de production de Q est nul ; cette hypothèse simplificatrice n'a pas d'impact qualitatif sur les résultats.

La deuxième technologie est l'alternative incertaine, nous la désignons par *tech I*. Elle implique une mise de fonds initiale non récupérable I et des flux de revenus nets futurs incertains. Le coût de production avec cette technologie dépend en effet d'une variable aléatoire v qui suit un processus Brownien sans tendance.

$$dv = \sigma dz \tag{2.1}$$

$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt}$ est l'accroissement d'un processus de Wiener, avec ε_t une variable aléatoire de moyenne nulle, indépendante dans le temps et normalement distribuée. v est continûment perturbé par des chocs d'espérance nulle et de variance instantanée $\sigma^2 dt$. Le coût de production de la quantité Q par période est :

$$C(v) = \bar{C} e^{-v},$$

il est décroissant et convexe en v. La convexité de la fonction de coût implique la concavité du profit par rapport à v. Comme $C(0) = \bar{C}$, un niveau de v nul indique que le coût de production avec la *tech I* est égal au coût de production avec la technologie légère ; si v passe au-dessous de 0 la *tech I* devient plus coûteuse que la technologie légère.

Étant donné le mouvement aléatoire de v, le coût de production $C(v)$ suit un processus Brownien Géométrique dont la dérive, taux de croissance espéré, est une fonction de σ^2 :

$$\frac{dC}{C} = \frac{\sigma^2}{2}dt - \sigma dz. \tag{2.2}$$

Pour faire le lien avec les exemples précédemment cités, la variable v peut être un indice de débit si le projet d'investissement dans la *tech I* correspond à la construction d'une centrale hydroélectrique. La variable v serait un indice exprimant une fonction du prix du gaz, décroissante et convexe, s'il s'agit de construire une centrale thermique à gaz ; plus le prix du gaz est élevé, plus v est faible et plus le coût de production est important.

Le choix des paramètres est fait de manière à n'exclure aucune des deux options technologiques de prime abord. Nous supposons que les coûts initiaux d'investissement K et I, respectivement dans la *tech I* et dans la *tech C*, sont inférieurs à la valeur présente des coûts de production de Q avec la technologie légère : $K \leq \frac{\bar{C}}{r}$ et $I \leq \frac{\bar{C}}{r}$ où r est le taux d'intérêt sans risque. De ce fait, il est plus attrayant d'investir immédiatement dans la *tech C* que de recourir indéfiniment à la technologie légère. Cependant, pour certaines valeurs de v, il est encore plus intéressant d'investir dans la *tech I*. En effet, nous supposons aussi, que la construction d'installations de production avec la *tech C* est plus coûteuse que celle d'installations de production avec la *tech I* : $I \leq K$. Cette hypothèse garantit l'existence de valeurs de v pour lesquelles l'utilisation de la technologie incertaine est plus profitable que les deux autres systèmes de production, malgré la présence de coûts variables.

La stratégie optimale d'investissement de la firme est analysée dans le cadre du modèle décrit ci-haut. Il y a deux niveaux de décisions. Dans un premier niveau la firme doit choisir entre la flexibilité et l'engagement. Une fois qu'elle opte pour l'engagement, elle doit décider si elle investit dans la technologie risquée ou bien dans la technologie certaine. Ces décisions sont prises simultanément.

2.2.2 Modèle sans incertitude

Dans le cas déterministe où la valeur de v est connue et constante à tout t, la valeur de la firme qui peut décider d'investir aussitôt est[2] :

$$V = \max \left\{ \int_t^\infty e^{-r(s-t)}(R - \overline{C})ds \ ; \ \int_t^\infty e^{-r(s-t)}Rds - K \ ; \right.$$
$$\left. \int_t^\infty e^{-r(s-t)}(R - C(v))ds - I \right\}$$

$$V = \max \left\{ \frac{R - \overline{C}}{r} \ ; \ \frac{R}{r} - K \ ; \ \frac{R}{r} - \frac{C(v)}{r} - I \right\} \tag{2.3}$$

où R est le revenu de la firme provenant de la vente d'une quantité Q sur le marché à un prix donné P. Les flux de profits sont actualisés au taux r, dont nous allons discuter dans la section prochaine.

D'après nos hypothèses, le projet d'investissement dans la *tech C* est toujours plus profitable que la technologie légère :

$$\frac{R - \overline{C}}{r} \leq \frac{R}{r} - K.$$

Le problème 2.3 se réduit au choix entre la *tech C* et la *tech I* :

$$V = \max \left\{ \frac{R}{r} - K \ ; \ \frac{R}{r} - \frac{C(v)}{r} - I \right\}.$$

À $v^* = \ln(\frac{\overline{C}}{r(K-I)})$ les deux projets sont équivalents (figure 2.1). La valeur présente des coûts de production cumulés de la *tech I*, $\frac{C(v^*)}{r}$, égalise la différence entre les coûts directs d'investissement K et I. Ou encore le coût variable $C(v^*)$ est égal à $r(K - I)$, rendement du capital que l'investisseur considère comme coût d'opportunité s'il achète la *tech C*. Si

[2] v n'a pas de tendance dans le temps. Quelque soit t, $v_t = v$.

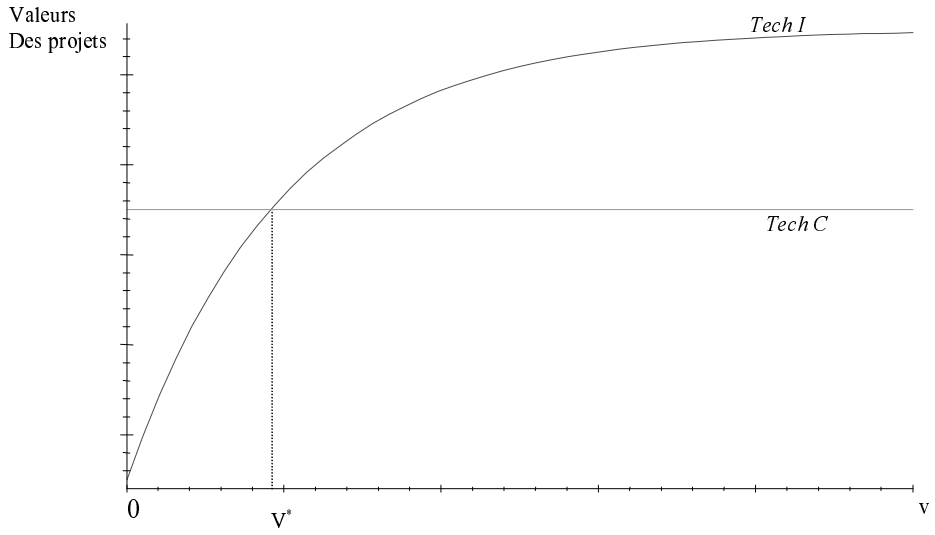


FIG. 2.1 – Décision d'investissement en certitude

v est plus petit que v^*, le coût de production $C(v)$ est assez élevé pour que l'avantage de la *tech I* sur la *tech C* en terme de coûts d'investissement disparaîsse : $\frac{C(v)}{r} > (K - I)$. Par contre, lorsque v est plus grand que v^*, la *tech I* est plus rentable.

2.2.3 Modèle avec incertitude

Si la firme ne possédait que l'option d'investir dans la *tech I*, on aurait le modèle classique d'investissement irréversible dans un unique projet dont la valeur est incertaine. La règle de décision est alors traduite par une valeur critique $\widetilde{v}$ de la variable stochastique qui déclenche l'investissement et au-dessous de laquelle la firme préfère continuer de produire à un coût élevé et voir comment évolue la variable aléatoire v.

Dans notre modèle, la firme a une opportunité d'investissement renfermant deux options. Même si la valeur du projet d'investissement dans la *tech C* est indépendante de v,

la décision de son exécution dépend indirectement des réalisations de v. Étant donné que les deux projets sont irréversibles et mutuellement exclusifs, lorsque la firme se lance dans la construction des installations de la *tech C* elle perd l'option d'investir dans la *tech I* si éventuellement v atteint des valeurs élevées. Elle se prive ainsi de l'opportunité d'avoir plus d'information sur l'évolution du niveau du coût et de faire un choix plus éclairé. De même, si elle investit dans la *tech I* très tôt, elle renonce à l'option d'investir dans la *tech C* si v s'avère faible.

La fonction de valeur de la firme provient du flux de profits courants et de la valeur des options de celle-ci sur des flux de profits futurs. Nous utilisons la méthode de programmation dynamique pour déterminer cette fonction et 'évaluer' la volonté ou la disposition de la firme à détenir ces options. Pour escompter les valeurs futures, on a besoin d'un taux d'actualisation. En programmation dynamique, le taux d'escompte est exogène. Il s'interprète comme le coût d'opportunité du capital et donc doit être égal au rendement que l'investisseur aurait pu obtenir avec une opportunité d'investissement qui a des caractéristiques de risque comparables. La méthode des actifs contingents évalue les opportunités de la firme en répliquant le rendement espéré et le risque de l'actif sous-jacent à travers un portefeuille d'actifs échangés sur les marchés[3]. L'équilibre des marchés de capitaux élimine les possibilités d'arbitrage et détermine le rendement exigé sur l'actif détenu par la firme. Par cette méthode, il n'y a que le taux d'intérêt sans risque qui est pris de façon exogène. Cependant, les deux méthodes d'évaluation des options réelles sont équivalentes, si dans la programmation dynamique on utilise le taux d'intérêt sans risque comme taux d'actualisation et si on ajuste le taux d'appréciation espérée de la valeur de l'actif sous-jacent par la prime de risque déterminée par l'équilibre du marché. Dans la suite de ce travail, nous allons supposer la neutralité au risque de l'investisseur et prendre le taux d'intérêt sans risque r comme taux d'actualisation ; les flux certains et incertains sont escomptés

[3] Cette approche suppose une économie avec un grand nombre d'actifs échangés avec différents rendements et carctéristiques de risque.

au même taux.

Soit $W(i,j,v)$ la valeur de la firme lorsqu'elle possède i unité de la *tech I* et j unité de la *tech C*. $W(0,0,v)$ est la valeur de la firme qui n'a pas encore investi et qui détient l'opportunité de le faire.

$$W(0,0,v_t) = \max_T E_t \left\{ \int_t^T e^{-r(s-t)}(R-\bar{C})ds + e^{-r(T-t)}\left(W(i,j,v_T) - iI - jK\right) \quad ; \right.$$

$$i,j \in \{1,0\} \ \mid \ ij = 0 \ ; \ T = \inf(t \quad \mid i = 1 \ ou \ j = 1)\} \tag{2.4}$$

sous la contrainte $dv = \sigma dz$.

La valeur de la firme se compose de la valeur présente de ses profits cumulés jusqu'à la date T et de la valeur qu'elle espère obtenir si elle investit à T, ramenée au temps présent t. T est la date d'arrêt, qui est stochastique. C'est l'instant auquel v atteint pour la première fois un seuil qui déclenche l'investissement, soit dans la *tech C*, soit dans la *tech I*.

Décomposons le temps en un laps dt plus le temps qui reste entre $(t+dt)$ et T :

$$W(0,0,v_t) = \max_T E_t \left\{ \int_t^{t+dt} e^{-r(s-t)}(R-\bar{C})ds + e^{-rdt} \int_{t+dt}^{T} e^{-r(s-t-dt)}(R-\bar{C})ds + \right.$$

$$e^{-rdt}\left[e^{-r(T-t-dt)}\left(W(i,j,v_T) - iI - jK\right)\right] \quad ;$$

$$i,j \in \{1,0\} \ / \ ij = 0 \ ; \ T = \inf(t \quad \mid i = 1 \ ou \ j = 1)\}\,. \tag{2.5}$$

En supposant qu'au terme de dt, on est toujours dans la région de continuation, autrement dit $(t+dt) < T$, la valeur de la firme peut s'écrire comme suit :

$$W(0,0,v_t) = \int_t^{t+dt} e^{-r(s-t)}(R-\bar{C})ds + e^{-rdt}E_t\left[W(0,0,v_t+dv) \mid v_t\right]. \tag{2.6}$$

La valeur de continuation se compose du flux de profit courant provenant de l'exploitation de la technologie légère sur l'intervalle dt et, de la valeur présente espérée de détenir encore l'option d'investissement au bout de cet intervalle de temps.

$$W(0,0,v_t) = (R-\bar{C})dt + e^{-rdt}E_t\left[W(0,0,v_t+dv) \mid v_t\right].$$

Par une expansion de $2^{ème}$ ordre de $E\left[e^{-rdt}W(0,0,v+dv)\right]$ autour de $dt=0$ ($dv=0$), on obtient l'égalité suivante entre le rendement espéré par la firme et le gain en capital sur dt :

$$rWdt = (R-\bar{C})dt + E\left[dW\right]. \tag{2.7}$$

La différentielle dW est donnée par le lemme d'Ito :

$$dW = \frac{\partial W}{\partial v}dv + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}(dv)^2. \tag{2.8}$$

L'équation de Bellman pour le problème (2.5) est obtenue après substitution de dv par son mouvement (2.1) dans l'équation (2.8) et insertion de dW dans l'équation (2.7).

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial v^2} - rW + (R-\bar{C}) = 0. \tag{2.9}$$

Cette équation différentielle de $2^{ème}$ ordre non homogène admet pour solution particulière : $\frac{R-\bar{C}}{r}$ et pour solution complémentaire : $Be^{\beta v}$. En remplaçant la solution complémentaire dans la partie homogène de l'équation (2.9), nous obtenons l'équation caractéristique : $r - \frac{\sigma^2}{2}\beta^2 = 0$. Puisque r et σ^2 sont strictement positifs, cette équation a deux racines réelles de signes opposés $\beta = \pm\sqrt{\frac{2r}{\sigma^2}}$. β_1 et β_2 sont les racines respectivement positive et négative. Toute solution de l'équation (2.9) est donc de la forme :

$$W(0,0,v_t) = \frac{R-\bar{C}}{r} + B_1 e^{\beta_1 v_t} + B_2 e^{\beta_2 v_t} \tag{2.10}$$

où B_1 et B_2 sont deux constantes à déterminer.

Le premier terme de la solution représente la valeur de la firme si elle n'investit jamais et continue à utiliser la technologie légère pour fournir Q sur le marché. Les deux autres termes représentent la valeur de l'option d'investissement détenue par la firme. Notons que lorsque les réalisations de v sont très faibles la valeur de l'option d'investir dans la *tech I* ne s'annule pas. Le processus de v est tel qu'il y a toujours une probabilité que les réalisations de la variable s'améliorent dans l'avenir.

L'équation de Bellman doit être satisfaite par $W(0,0,v)$ tant que la firme n'a pas encore investi. Les deux instants auxquels la firme exerce son option par le choix de l'une ou l'autre des technologies correspondent à deux valeurs critiques de la variable stochastique v qui vont déclencher l'investissement. Quatre conditions aux bornes vont déterminer les régions d'arrêt. À chaque instant, la firme compare le coût d'attendre et reporter la dépense d'investissement et le coût d'une décision immédiate. En d'autres termes, elle compare sa valeur d'option et la valeur présente des flux de profits générés par la réalisation immédiate de chacun des projets, nette du coût d'investissement initial. Ceci nous permet de poser deux conditions de 'value-matching' et deux conditions de 'smooth-pasting' garantissant la continuité de $W(0,0,v)$ et la tangence aux points de contact.

Soit $W(0,1) = W(0,1,v_t)$ la valeur nette de la firme qui investit à t dans le projet certain. $W(0,1)$ est la valeur présente, nette du coût d'investissement, des flux de profits du projet :

$$\begin{aligned} W(0,1) &= \int_t^{\infty} e^{-r(s-t)} R ds - K \\ W(0,1) &= \frac{R}{r} - K. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Lorsque la firme investit dans le projet risqué, sa valeur nette est :

$$\begin{aligned} W(1,0,v_t) &= E_t\left[\int_t^{\infty} e^{-r(s-t)}(R-\bar{C}e^{-v_s})ds\right] - I \\ W(1,0,v_t) &= \frac{R}{r} - \frac{\bar{C}}{r-\frac{\sigma^2}{2}}e^{-v_t} - I. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Une restriction sur r et σ est nécessaire à ce stade. Le taux d'actualisation r doit être supérieur à $\frac{\sigma^2}{2}$ et donc β_1 supérieur à 1. Rappelons que $\frac{\sigma^2}{2}$ est le taux de croissance espéré du coût de production $C(v)$. Lorsque t tend vers ∞, le coût de production cumulé et escompté sera infini si r est inférieur à $\frac{\sigma^2}{2}$. et la valeur du projet tend vers $-\infty$. L'option d'investissement dans l'actif risqué ne sera donc jamais exercée. Sous la restriction indiquée, la fonction $W(1,0,v)$ prend la forme donnée par (2.12) ; elle est croissante et concave en v.

Au seuil critique $\overline{v}$ qui déclenche l'investissement dans l'actif incertain, les conditions d'arrêt sont :

$$W(0,0,\overline{v}) = W(1,0,\overline{v}) \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial W(0,0,\overline{v})}{\partial v} = \frac{\partial W(1,0,\overline{v})}{\partial v}. \tag{2.14}$$

Au seuil critique $\underline{v}$ qui déclenche l'investissement dans l'actif certain, les conditions d'arrêt sont :

$$W(0,0,\underline{v}) = W(0,1) \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial W(0,0,\underline{v})}{\partial v} = \frac{\partial W(0,1)}{\partial v}. \tag{2.16}$$

En utilisant les expressions des fonctions données par les équations (2.10)-(2.12), les conditions (2.13)-(2.16) deviennent :

$$B_1 e^{\beta_1 \overline{v}} + B_2 e^{\beta_2 \overline{v}} + I = \frac{\bar{C}}{r} - \frac{\bar{C}}{r - \frac{\sigma^2}{2}} e^{-\overline{v}} \tag{2.17}$$

$$\beta_1 B_1 e^{\beta_1 \overline{v}} + \beta_2 B_2 e^{\beta_2 \overline{v}} = \frac{\bar{C}}{r - \frac{\sigma^2}{2}} e^{-\overline{v}} \tag{2.18}$$

$$B_1 e^{\beta_1 \underline{v}} + B_2 e^{\beta_2 \underline{v}} + K = \frac{\bar{C}}{r} \tag{2.19}$$

$$\beta_1 B_1 e^{\beta_1 \underline{v}} + \beta_2 B_2 e^{\beta_2 \underline{v}} = 0. \tag{2.20}$$

D'après les équations (2.17) et (2.19), à la date d'exercice de l'option d'investissement, le bénéfice espéré du projet réalisé, en terme de réduction des coûts de production par rapport à la technologie légère utilisée, doit compenser le coût direct d'investissement et le coût d'opportunité. Le coût d'opportunité consiste en la perte de l'option de reporter la décision et de la flexibilité de choisir entre les deux technologies ou actifs disponibles. Les conditions (2.18)-(2.20), imposent l'égalité entre les changements marginaux du coût d'opportunité et du bénéfice espéré suite à une variation de la variable d'état v, aux points de contact.

Ces quatre conditions permettent de déterminer les constantes B_1 et B_2 et les deux seuils critiques $\overline{v}$ et $\underline{v}$ en fonction des paramètres du modèle. Analytiquement, nous arrivons à une expression qui définit l'écart entre les deux seuils d'investissement.

$$(\overline{v} - \underline{v}) = \frac{1}{\beta_1} \ln (X). \tag{2.21}$$

avec $X = \frac{A + \sqrt{A^2 - (1 - \beta_1^2)}}{1 + \beta_1}$ et $A = \frac{\frac{\bar{C}}{r} - I}{\frac{\bar{C}}{r} - K} > 1.$

À partir des conditions (2.17)-(2.20) nous déterminons les expressions explicites des deux valeurs critiques $\overline{v}$ et $\underline{v}$ et les constantes B_1 et B_2 :

$$\overline{v} = \ln\left(\frac{2\overline{c}}{\beta_1(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right) - \ln\left(\frac{\overline{c}}{r}-K\right) + \ln(X) - \ln(X^2-1) \tag{2.22}$$

$$\underline{v} = \ln\left(\frac{2\overline{c}}{\beta_1(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right) - \ln\left(\frac{\overline{c}}{r}-K\right) + \frac{\beta_1-1}{\beta_1}\ln(X) - \ln(X^2-1) \tag{2.23}$$

$$B_1 = \frac{\frac{\overline{c}}{r}-K}{2}e^{-\beta_1\underline{v}} \tag{2.24}$$

$$B_2 = \frac{\frac{\overline{c}}{r}-K}{2}e^{\beta_1\underline{v}}. \tag{2.25}$$

La fonction de valeur $W(0,0,v)$ est convexe en v, elle atteint un minimum en $\underline{v}$ et elle est croissante et continue sur l'intervalle $[\underline{v},\overline{v}]$. Nous avons $\underline{v} < \overline{v}$, puisque la dérivée première de $W(0,0,v)$ est croissante et $\frac{\partial W(0,0,\underline{v})}{\partial v} < \frac{\partial W(0,0,\overline{v})}{\partial v}$. On peut aussi vérifier que X est supérieur à 1.

$$W(0,0,v) = \begin{cases} \frac{R}{r}-K & \text{si } v \leq \underline{v} \\ \frac{R-\bar{C}}{r} + B_1 e^{\beta_1 v} + B_2 e^{\beta_2 v} & \text{si } \underline{v} < v < \overline{v} \\ \frac{R}{r} - \frac{\bar{C}}{r-\frac{\sigma^2}{2}}e^{-v} - I & \text{si } v \geqslant \overline{v} \end{cases}$$

2.3 Analyse des résultats

2.3.1 La règle de décision

Nous avons caractérisé la règle de décision qui stipule d'investir au moment où v atteint soit $\overline{v}$ soit $\underline{v}$. Selon les hypothèses posées sur les paramètres l'écart entre les seuils est positif. Ces deux valeurs critiques, représentent donc une limite inférieure ($\underline{v}$) et une limite supérieure ($\overline{v}$) à la région d'inaction et déterminent le choix de la technologie ou du projet d'investissement (figure 2.2).

À partir d'une situation initiale où la valeur de v est comprise entre $\underline{v}$ et $\overline{v}$, aucune action n'est entreprise. La firme a intérêt à attendre et voir dans quel sens évolue cet indice. Le premier instant que v atteint l'une des bornes, s'engager devient plus intéressant pour la firme que de garder sa flexibilité. Si v atteint en premier $\underline{v}$, la firme investit dans le projet certain. Les réalisations de v sont suffisamment faibles ($v \leq \underline{v}$) pour que l'option incertaine soit écartée et pour que la firme investisse sans attendre dans la technologie sans risque. Si par contre, v atteint $\overline{v}$ en premier, c'est le projet incertain qui sera réalisé. Les réalisations élevées de v ($v \geq \overline{v}$) rendent la technologie à risque plus profitable même si la firme perd l'option d'investir dans la technologie certaine.

Il est intéressant de noter que le point d'intersection entre $W(0,1)$ et $W(1,0,v)$ donne la valeur de la variable aléatoire v et par conséquent le coût $C(v)$ qui détermine le choix de la technologie, si la firme peut et doit décider d'investir immédiatement. Sans l'option de reporter l'investissement, la règle de décision consiste à installer la *tech C,* si $v < v^*_\sigma$, et la *tech I,* si $v < v^*_\sigma$. À $v = v^*_\sigma$, la firme est indifférente entre les deux types d'actifs. C'est la règle que donne une évaluation traditionnelle des projets par leurs valeurs présentes espérées nettes.

$$v^*_\sigma = \ln\left(\frac{\overline{C}}{r - \frac{\sigma^2}{2}}\right) - \ln\left(K - I\right). \tag{2.26}$$

v^*_σ se trouve dans l'intervalle des valeurs de v, $[\underline{v}, \overline{v}]$ pour lesquelles l'attente est le meilleur choix pour la firme. La valeur de la flexibilité de produire avec la technologie légère, même si elle est coûteuse, compte tenu de l'opportunité d'installer l'une des technologies disponibles, est plus importante que celle que la firme peut espérer recevoir par un engagement immédiat. une règle de décision basée sur v^*_σ, ignorerait les options de la firme et la flexibilité ex-ante qu'elles lui offrent. L'écart entre $\underline{v}$ et v^*_σ reflète la valeur de l'opportunité de reporter la décision d'acquisition de la *tech C* et de pouvoir profiter d'une hausse éventuelle de v (baisse du coût de production $C(v)$). La différence entre v^*_σ et $\overline{v}$ traduit

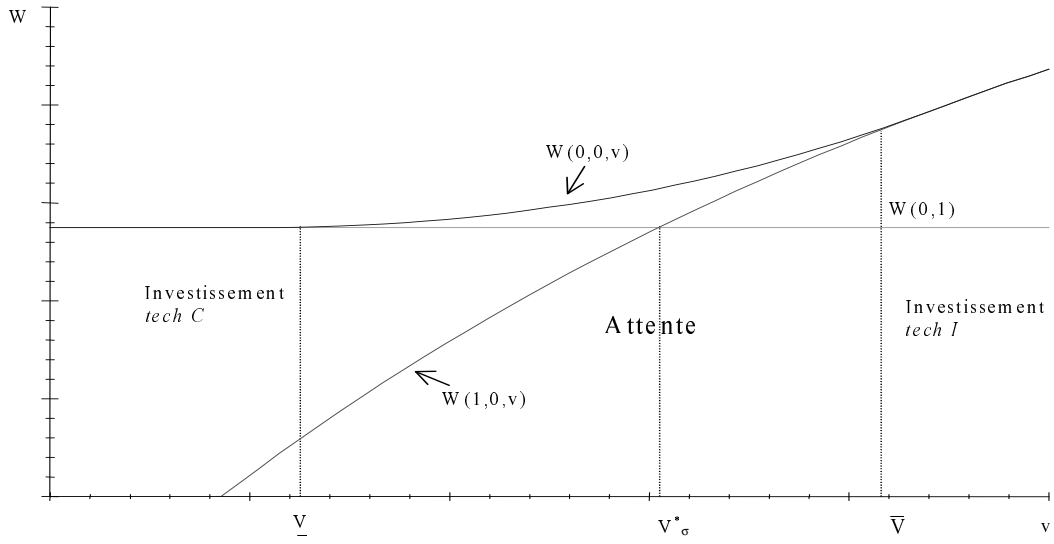


FIG. 2.2 – Décision d'investissement et choix de la technologie

la valeur de l'opportunité de ne pas procéder immédiatement à l'installation de la *tech I* et de garder la possibilité de choisir l'actif sans risque en cas d'une baisse de v (hausse de $C(v)$). L'investisseur se réserve une marge de flexibilité pour limiter le risque inhérent à sa décision d'investissement.

Le seuil v_σ^* augmente avec l'incertitude et il est à son minimum en $\sigma^2 = 0 : v_\sigma^* = v^*$.

$$\frac{\partial v_\sigma^*}{\partial \sigma^2} = \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{2\overline{C}} > 0$$

et quelle que soit $\sigma^2 \geqslant 0$:

$$\underline{v} \leq v_\sigma^* \leq \overline{v}.$$

Lorsque σ^2 tend vers zéro l'écart entre les seuils critiques $\overline{v}$ et $\underline{v}$ s'annule et on peut vérifier que ces derniers se confondent avec v^* :

$$\lim_{\sigma^2 \to 0} \overline{v} = \lim_{\sigma^2 \to 0} \underline{v} = v^*, \tag{2.27}$$

v^* sépare l'intervalle des valeurs de v pour lesquelles la firme choisit l'investissement dans la *tech C* et l'intervalle des valeurs pour lesquelles l'investissement dans la *tech I* est préféré. En l'absence d'incertitude, la région d'attente n'existe pas, puisqu'il n'y a pas de gain du report de la décision d'investissement.

Dans le modèle avec uniquement l'option d'investissement dans la technologie incertaine, la règle de décision est d'attendre que v dépasse le seuil critique $\widetilde{v}$ pour investir ou encore que le coût de production $C(v)$ baisse suffisamment (au-dessous de $C(\widetilde{v})$)[4].

$$\widetilde{v} = \ln\left(\frac{1+\beta_1}{\beta_1}\frac{\overline{c}}{r-\frac{\sigma^2}{2}}\right) - \ln\left(\frac{\overline{c}}{r} - I\right). \tag{2.28}$$

On peut montrer que $\widetilde{v}$ est inférieur à $\overline{v}$. L'investisseur s'engagera dans la *tech I,* en acceptant un coût de production espéré plus élevé lorsqu'elle représente la seule alternative à la sous-traitance. Dans ce cas, le coût d'opportunité de l'investissement n'intègre pas le coût de renonciation à un deuxième projet mais uniquement celui de se départir d'une production flexible avec une option de l'échanger contre des installations irréversibles. Par conséquent, la valeur d'option est plus faible et la région de continuation est moins étendue que dans le modèle où il y a deux alternatives à la sous-traitance.

En regardant les seuils critiques d'investissement dans la *tech I*, $\overline{v}$ et $\widetilde{v}$, la décision d'acquisition est prise plus tôt (à un v moins élevé) lorsque la *tech C* n'est pas disponible. Mais ceci ne signifie pas que l'intervalle d'attente est moins important dans ce cas. Effectivement, pour toutes les valeurs faibles de v au-dessous de $\underline{v}$, une firme qui a le choix entre les deux technologies aurait déjà investi (*tech C*) alors qu'elle se trouverait dans une région de continuation si la *tech I* est l'unique technologie disponible. La figure 2.3, reproduit les fonctions de valeur et les règles de décision dans les deux situations.

[4] Voir annexe A.

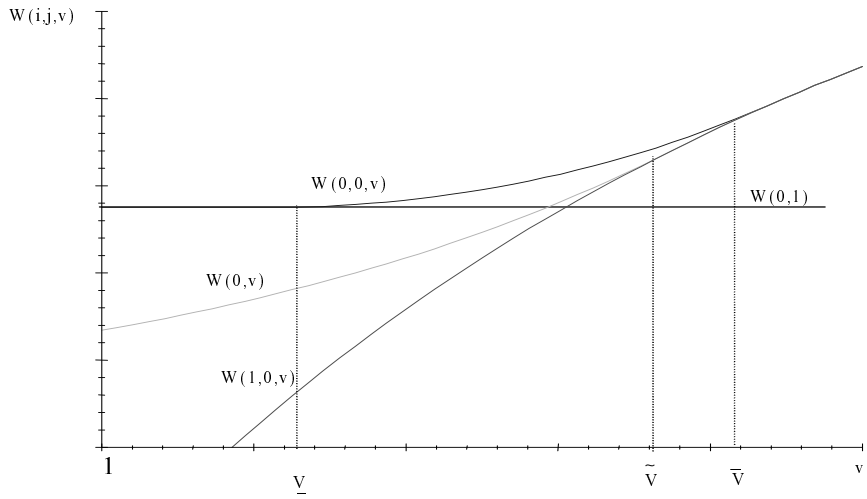


FIG. 2.3 – Investissement dans *tech I* ; avec et sans la technologie concurrente

Lorsque le coût d'investissement dans la technologie certaine, K, tend vers la valeur présente du coût de production de la technologie légère, $\frac{\overline{c}}{r}$, l'investissement dans l'actif sans risque cesse d'être une option pour la firme. Nous retrouvons alors le résultat du modèle avec une seule option d'investissement : l'option d'installer l'actif risqué. En effet, nous avons :

$$\lim_{K \to \frac{\overline{c}}{r}} \overline{v} = \widetilde{v}.$$

2.3.2 Impact de la volatilité

Le coût variable de production $C(v)$ a une tendance (2.2) qui est fonction du paramètre d'incertitude σ. Alors, toute variation de la volatilité aura un effet direct et un autre indirect, à travers le taux de croissance espéré du coût.

Pour l'analyse de l'impact de l'incertitude sur la valeur de l'opportunité d'investisse-

ment de la firme et sur la règle de décision, nous allons d'abord isoler l'effet direct en supposant l'indépendance entre les déterminants des fonctions de valeurs, puis les laisser libre de s'ajuster à la variation de la volatilité.

Les effets directs d'une variation de σ^2

En posant $\alpha = \frac{\sigma^2}{2}$ le processus du coût $C(v)$ (2.2) devient :

$$\frac{dC}{C} = \alpha dt - \sigma dz.$$

Une augmentation de la volatilité, avec une tendance (α) du coût constante, produit les résultats habituels des modèles d'options réelles en terme de valeur d'option de l'investissement. Ainsi la valeur de l'opportunité d'investissement avec choix technologique augmente quand l'incertitude sur l'actif risqué est plus grande (figure 2.4). Les deux seuils critiques $\underline{v}$ et $\overline{v}$ se déplacent dans des sens contraires en s'éloignant de v^*_σ, ce dernier ne bouge pas puisque α est fixe.

Plus d'incertitude augmente la valeur de l'opportunité d'investir dans la *tech I* et repousse la date l'investissement ($\overline{v}$ est plus élevé). D'un autre côté, l'investissement dans l'actif certain est déclenché par une valeur de v plus faible et donc par un coût de production $C(v)$ plus élevé. Du point de vue de l'investisseur, plus d'incertitude sur la *tech I* ne privilégie pas le projet dont la valeur est certaine. Bien au contraire, l'appréciation de la valeur de l'option d'installer la *tech I* correspond à une augmentation du coût d'opportunité d'exercer l'option d'investissement par l'acquisition de l'actif certain. Ainsi, il faut que le coût de production avec l'actif risqué atteigne des valeurs plus prohibitives pour que la firme y renonce, en étant raisonnablement certaine qu'elle ne regrettera pas son choix de sitôt.

L'écart entre les deux seuils critiques, représentant la région de continuation ou de détention de l'option d'investissement, est plus important. L'augmentation du risque associé

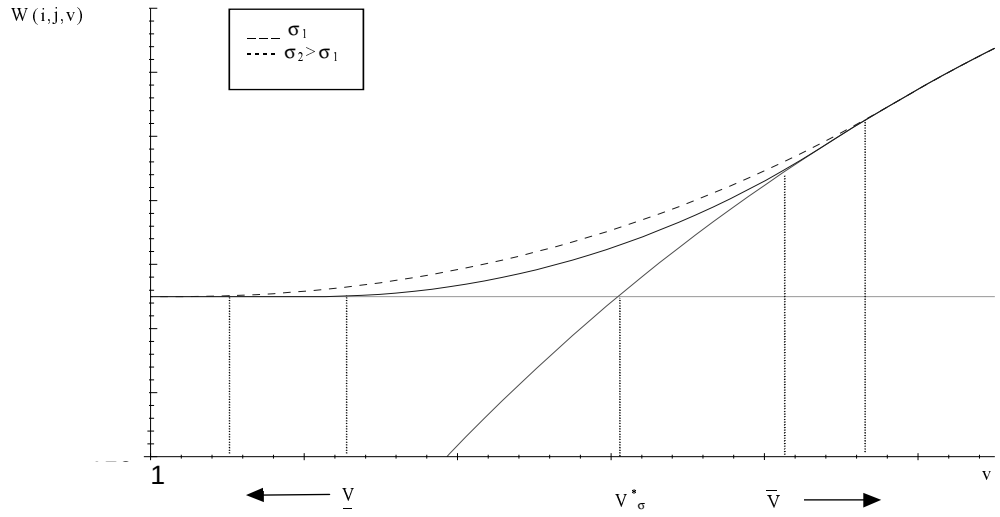


FIG. 2.4 – Effet d'une variation à la hausse de σ^2 avec α constant

à la *tech I* ne donne aucun avantage à l'actif sans risque, comme nous aurions pu nous y attendre. En nous référant aux variations relatives des valeurs critiques, nous constatons que la hausse de $\overline{v}$ est moins importante que la baisse de $\underline{v}$, ce qui signifie que face à plus d'incertitude l'investisseur privilégie l'actif risqué.

L'effet total d'une variation de σ^2

En laissant tous les paramètres du modèle s'ajuster à la variation de σ^2, une augmentation de la volatilité réduit la valeur du projet incertain $W(1,0,v)$ et donc le coût de l'attente, qui correspond à la réduction des coûts de production non réalisée, diminue aussi.

$$\frac{dW(1,0,v)}{d\sigma^2} = -\frac{\overline{c}}{2(r-\alpha)^2}e^{-v} < 0. \tag{2.29}$$

Le changement de la valeur de continuation $W(0,0,v)$ résultant d'une variation de

l'incertitude est mesuré par $\frac{dW(0,0,v)}{d\sigma^2}$.

$$\frac{dW(0,0,v)}{d\sigma^2} = \beta_1 \left[B_2 e^{-\beta_1 v} - B_1 e^{\beta_1 v}\right] \left[\frac{v-\underline{v}}{2\sigma^2} + \frac{d\underline{v}}{d\sigma^2}\right]. \tag{2.30}$$

Cette expression est négative si $\frac{d\underline{v}}{d\sigma^2} > 0$. En effet, on n'a $\frac{d\underline{v}}{d\sigma^2} < 0$ que pour des valeurs de paramètres pour lesquelles la *tech C* est sans intérêt (voir annexe A). En dehors donc de certains cas particuliers, le seuil critique $\underline{v}$ est croissant en σ^2 et $W(0,0,v)$ diminue quand l'incertitude sur la valeur de l'actif risqué est plus grande.

À première vue, ce résultat est surprenant. En effet, dans les modèles d'options réelles il a été démontré que la valeur d'une option dépend directement des paiements de la décision d'investissement, du temps jusqu'à la date de décision et de la volatilité. L'investissement est très sensible à la volatilité dans les valeurs de projets, indépendamment des préférences au risque. Toutes choses égales par ailleurs, une augmentation du risque total augmente la valeur de l'option. Lorsque la volatilité est élevée, la distribution des réalisations est plus large. Il y a donc plus de chance d'avoir une mauvaise réalisation mais avec des pertes limitées et une plus grande chance d'avoir une bonne réalisation, ce qui crée de la valeur.

Dans notre modèle, l'augmentation de σ^2 correspond à une évolution de la tendance (α) du coût $C(v)$ vers la hausse. Pour une même réalisation de v, le taux de croissance espéré du coût de production est plus élevé. L'accroissement de ce taux augmente la sensibilité de la valeur du projet incertain par rapport à $C(v)$, ce qui constitue un facteur de baisse de la valeur d'option d'investissement.

$$\begin{aligned} dW(1,0,v) &= -\frac{dC(v)}{r-\alpha} \\ &= -\frac{\alpha}{r-\alpha}C(v)dt + \frac{\sigma}{r-\alpha}C(v)dz. \end{aligned}$$

Un phénomène similaire s'observe dans le modèle standard d'option lorsque la dérive de la valeur du projet diminue. Une autre façon d'appréhender ce phénomène est de constater

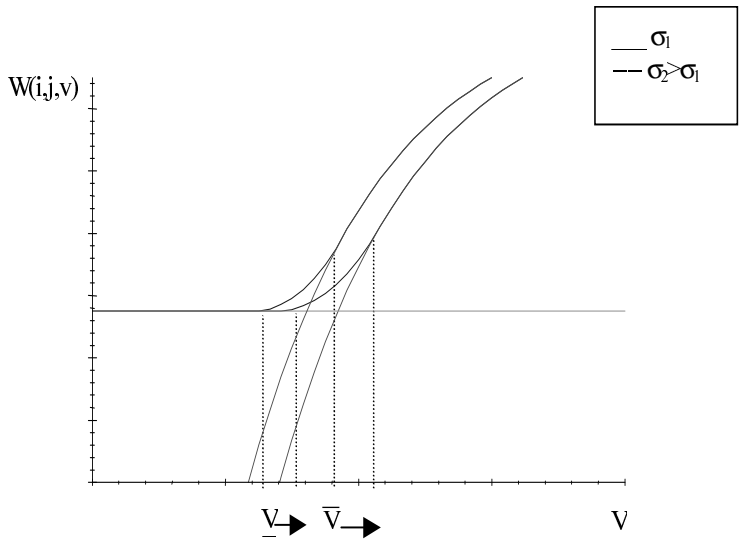


FIG. 2.5 – Effet d'une variation de σ^2 avec ajustement de tous les paramètres

que la valeur présente espérée du projet $W(1,0,v)$ est plus faible puisque les coûts de production $C(v)$ sont actualisés à un taux $(r - \frac{\sigma^2}{2})$ plus petit, alors que la valeur présente de la dépense d'investissement reste la même.

Enfin de compte, la variation de la volatilité s'accompagne de changements dans les autres paramètres du modèle qui induisent la baisse de la valeur d'option. Notre résultat ne contredit pas celui des modèles standards d'options réelles. Il y a un déplacement de $W(1,0,v)$ et de $W(0,0,v)$ vers la droite (figure 2.5) qui résulte en une augmentation des deux seuils critiques d'investissement $\underline{v}$ et $\overline{v}$ et ainsi qu'un déplacement de v_σ^*.

À un seuil critique $\overline{v}$ plus élevé correspond un coût de production $C(\overline{v})$ plus faible. Le niveau du coût exigé par la firme pour investir dans l'actif risqué est plus petit, ce qui se traduit par un report dans le temps du moment optimal d'investissement.

$\overline{v}$ croissant en σ^2, indique que la valeur d'option $W(0,0,v)$ décroît moins rapidement que la valeur présente du projet $W(1,0,v)$ lorsque l'incertitude entourant le coût augmente.

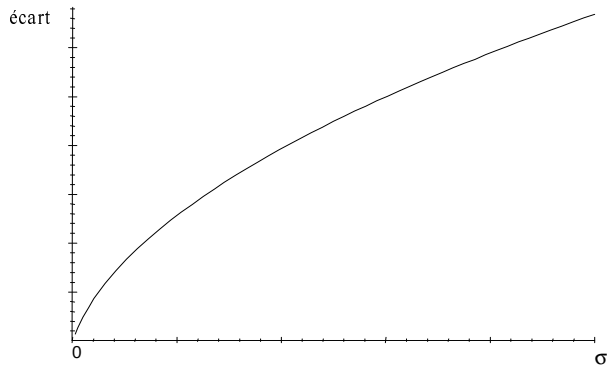


FIG. 2.6 – Écart entre les seuils critiques en fonction de σ

Le coût d'opportunité de perdre la flexibilité de reporter la décision d'investissement et de choisir la technologie, devient quand même plus élevé relativement à la valeur du projet risqué. La firme exige donc une rentabilité plus forte du projet à recevoir, pour compenser le risque additionnel associé à cet actif; ce qu'elle fait en fixant un seuil minimal $\overline{v}$ plus élevé, retardant ainsi la date de son investissement.

Sachant que la valeur présente du projet d'investissement dans la *tech C* est constante et que $W(0,0,v)$ est croissante en v, les courbes $W(0,1)$ et $W(0,0,v)$ se rencontrent en un point $\underline{v}$ plus à droite à la suite d'une augmentation de σ^2. La firme achète plus vite la technologie lui assurant des coûts futurs certains car le coût d'opportunité de cet engagement a diminué.

L'écart entre les deux seuils critiques qui déclenchent l'investissement croît avec l'incertitude (figure 2.6).

$$\frac{d(\overline{v}-\underline{v})}{d\sigma^2} > 0. \tag{2.31}$$

Un écart plus important correspond à un intervalle d'attente plus large. L'effet sur le seuil $\overline{v}$ est plus important parce que l'incertitude affecte la valeur du projet en même

temps que la valeur d'option ; ce n'est pas le cas pour le projet certain dont la valeur est indépendante de cette incertitude. La baisse de la valeur d'option et du coût d'opportunité de l'attente rend plus net l'avantage d'un actif sur l'autre sans pou autant réduire le temps d'attente (figure 2.6).

Dans les deux cas que nous avons exposés, la volatilité réduit l'investissement en prolongeant l'intervalle d'attente, mais affecte différemment l'avantage relatif entre les deux actifs.

2.3.3 Effet d'une option d'abandon

Envisageons une version du modèle qui incorpore une option d'abandon. Une firme active qui utilise la technologie de production incertaine et qui se trouve exposée à de mauvaises réalisations du coût, a la possibilité d'abandonner ses installations de production. En abandonnant ses équipements, elle perd la dépense initiale qui a été nécessaire pour l'installation de la *tech I*. Supposons que cette firme a l'opportunité de débourser de nouveau pour acquérir l'actif certain, alternative à la technologie légère si elle veut demeurer sur le marché. La valeur du projet d'investissement dans la *tech I* se compose de la valeur présente des flux de profits espérés et de la valeur de l'option d'abandonner cette technologie[5] :

$$W^a(1,0,v_t) = \frac{R}{r} - \frac{\overline{c}}{r-\frac{\sigma^2}{2}} e^{-v_t} + B_3 e^{-\beta_1 v_t} \tag{2.32}$$

avec

$$B_3 = \frac{\overline{c}}{\beta_1 (r-\frac{\sigma^2}{2})} e^{(\beta_1 - 1)\widehat{v}} \tag{2.33}$$

$$\widehat{v} = \ln\left(\frac{\beta_1 - 1}{\beta_1}\right) + \ln\left(\frac{\overline{c}}{K(r-\frac{\sigma^2}{2})}\right). \tag{2.34}$$

[5] Voir annexe B

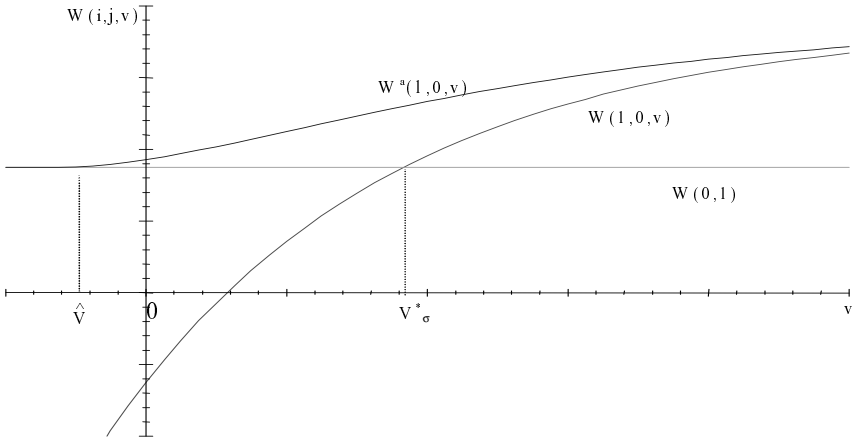


FIG. 2.7 – Décision d'abandon

$\widehat{v}$ est la valeur critique de v au-dessous de laquelle la firme, lorsqu'elle possède déjà la technologie risquée, a intérêt à fermer ses installations de production et à investir dans la technologie certaine (figure 2.7). Notons que la firme garde sa technologie jusqu'à ce que le coût de production atteigne $C(\widehat{v}) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}(r - \frac{\sigma^2}{2})K$, un niveau plus élevé que $C(v) = (r - \frac{\sigma^2}{2})K$ [6], coût auquel elle déciderait d'abandonner son actif contre la *tech C* si elle ne tient pas compte de l'opportunité de reporter sa décision. Notre firme est plus réticente à abandonner définitivement ses installations. Elle est prête à supporter de plus grandes pertes parce qu'elle tient compte du coût d'opportunité de perdre l'option d'avoir encore son capital si les réalisations de v s'amélioreraient.

Dans cette version du modèle, l'exercice de l'option d'investissement par le choix de l'actif risqué n'exclut pas un éventuel recours à l'autre actif disponible. Conséquemment, le coût de renonciation à la *tech C* est moins important. Par ailleurs, l'option d'abandon

[6] Ce coût correspond à la valeur de v au point d'intersection de $W(0,1)$ et $W(1,0,v)$, sur la figure 2.7

augmente la valeur du projet risqué et la valeur de l'option d'investir dans la *tech I*. Elle constitue une protection pour la firme contre les mauvaises réalisations de v. Si elle est utilisée, l'actif est abandonné et il n'y a plus aucun risque, ce qui donne à la firme plus de contrôle sur l'exposition de ses profits futurs à l'incertitude. La flexibilité associée à cette nouvelle option incite la firme à investir plus tôt dans le projet incertain, ce qui se traduit par une valeur critique $\overline{v}$ moins élevée que dans le modèle sans option d'abandon.

En ce qui concerne le seuil critique déclenchant l'investissement dans la technologie certaine, la valeur du projet sans risque doit couvrir le coût initial K, plus la valeur de l'option d'avoir la *tech I* à laquelle la firme renonce. Cette option a plus de valeur lorsque l'option d'abandon existe. En conséquence, la valeur critique $\underline{v}$ est plus faible que dans le modèle de base. Notons que la firme acceptera un coût de production $C(\widehat{v})$ plus élevé que $C(\underline{v})$ avant d'abandonner son premier investissement : l'acquisition de la *tech C* se fait plus tard dans le cas d'une firme qui a déjà utilisé une première option d'investissement.

2.4 Conclusion

Nous avons construit un modèle simple pour analyser le comportement d'un décideur qui détient l'option de faire un seul investissement irréversible et qui peut choisir entre deux technologies de production : l'une ne comportant aucun risque quant aux flux de revenus futurs et l'autre générant des flux de profits futurs sujets à des aléas. Nous avons montré que la règle de décision est décrite par deux valeurs critiques de la variable stochastique, qui délimitent de part et d'autre une région où l'investisseur préfère garder sa flexibilité de production. Chaque seuil représente la date optimale à laquelle l'investissement est déclenché par le choix d'un l'actif.

La décision d'investissement de la firme, que ce soit dans l'actif risqué ou l'actif sans risque, est déterminée par les valeurs relatives des options d'acquisition des deux technologies. L'information acquise par l'observation de l'évolution du coût est essentielle pour

guider la firme dans son choix. Pour cette raison il existe un intervalle de valeurs de la variable aléatoire, pour lesquelles la firme est indécise entre les deux projets, préférant attendre que les réalisations confirment l'avantage d'un actif par rapport à l'autre. L'investisseur choisit d'opérer dans un environnement incertain si sa rentabilité espérée est assez élevée pour justifier son exposition au risque de mauvaises réalisations. À la date d'investissement, la valeur espérée du projet reçu est plus élevée lorsqu'il s'agit de la technologie risquée. Cette prime est nécessaire pour compenser l'incertitude sur la valeur future, à laquelle la firme s'expose en se dotant de cet actif plutôt que de l'actif sans risque.

La disponibilité du choix entre les deux technologies diffère la date d'investissement ; ce dernier est immédiat lorsque l'ensemble de choix est réduit à l'actif certain et plus proche lorsque le seul actif disponible est l'actif risqué. La firme accorde plus de valeur à la flexibilité quand, à côté de l'irréversibilité de son engagement, il y a renonciation à l'option de réaliser autrement le même projet. En même temps, ce choix de technologie peut être vu comme un facteur qui stimule l'investissement. C'est à dire qu'avec une multiplicité d'options (projets) on peut assister à la concrétisation de l'investissement, ici par l'acquisition de l'actif certain, à un moment qui n'aurait pas été optimal s'il n'y avait qu'une seule manière de le réaliser (acquérir l'actif risqué).

Nous avons abordé l'étude de l'impact de la volatilité des coûts de production de la technologie incertaine sur la décision d'investissement, de deux façons. En premier lieu, nous avons fait varier le paramètre d'incertitude en faisant abstraction du changement induit au niveau du taux de croissance espéré du coût de production stochastique. Puis, nous avons refait le même exercice en permettant à tous les paramètres de s'ajuster. Dans le premier cas, la valeur d'option augmente et s'accompagne du report de l'investissement pour les deux actifs. Un délai dans la décision relativement plus important pour le projet sans risque, révèle une augmentation de la valeur de l'option sur le projet risqué suite à l'augmentation d'incertitude. Là encore l'incertitude est source de valeur pour une option sur une technologie incertaine. L'appréciation de la valeur de l'opportunité d'investir dans

le projet incertain est telle qu'il devient relativement plus cher d'acquérir la technologie sans risque, en terme de coût d'opportunité. Dans le deuxième cas, la hausse de l'incertitude réduit la valeur de l'opportunité d'investissement et celle du projet incertain. Elle favorise l'actif sans risque en avançant la date de son acquisition et en reportant celle de l'actif risqué.

Cependant dans les deux cas, la volatilité réduit l'investissement en prolongeant l'attente, même lorsque la valeur d'option est affectée à la baisse. En réponse à un risque additionnel, l'investisseur se donne plus de latitude en préservant sa flexibilité plus longtemps.

L'association d'une option d'abandon au projet incertain avec une opportunité d'un deuxième investissement, augmente la valeur de ce projet et la valeur de l'option de le réaliser par rapport au projet sans risque. La décision d'investir dans un actif pour investisseur qui abandonne des installations en place, est prise plus tard que celle qui n'implique que l'abandon d'une opportunité d'avoir ces mêmes installations. La perte de la dépense initiale justifie plus de patience et de prudence de la part de la firme productive.

2.5 Annexes

2.5.1 Annexe A :Détermination du seuil d'investissement dans le mod èle à une technologie

Valeur finale nette du projet :

$$W(1,0,v_t) = \frac{R}{r} - \frac{\bar{C}}{r - \frac{\sigma^2}{2}} e^{-v_t} - I.$$

Valeur d'option de la firme :

$$F(v_t) = \max \left\{ W(1,0,v_t) \ ; \ (R - \overline{C})dt + e^{-rdt} E\left[F(v_t + dv) \ / \ v_t \right] \right\}.$$

Dans la région de continuation :

$$F(v_t) = (R - \overline{C})dt + e^{-rdt} E\left[F(v_t + dv) \;/\; v_t\right].$$

Équation de Bellman :

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - rF + (R - \overline{C}) = 0.$$

La solution pour $F(v)$ est de la forme :

$$F(v) = \frac{R - \overline{C}}{r} + Ae^{\beta_1 v},$$

et les conditions d'égalité et de tangence au seuil d'investissement $\widetilde{v}$ sont :

$$\frac{R - \overline{C}}{r} + Ae^{\beta_1 \widetilde{v}} = \frac{R}{r} - \frac{\overline{C}}{r - \frac{\sigma^2}{2}} e^{-\widetilde{v}} - I$$

$$\beta_1 Ae^{\beta_1 \widetilde{v}} = \frac{\overline{C}}{r - \frac{\sigma^2}{2}} e^{-\widetilde{v}}.$$

Il s'ensuit :

$$\widetilde{v} = \ln\left(\frac{1 + \beta_1}{\beta_1}\frac{\overline{c}}{r - \frac{\sigma^2}{2}}\right) - \ln\left(\frac{\overline{c}}{r} - I\right)$$

$$A = \frac{\overline{c}}{\beta_1(r - \frac{\sigma^2}{2})} e^{-(1+\beta_1)\widetilde{v}}.$$

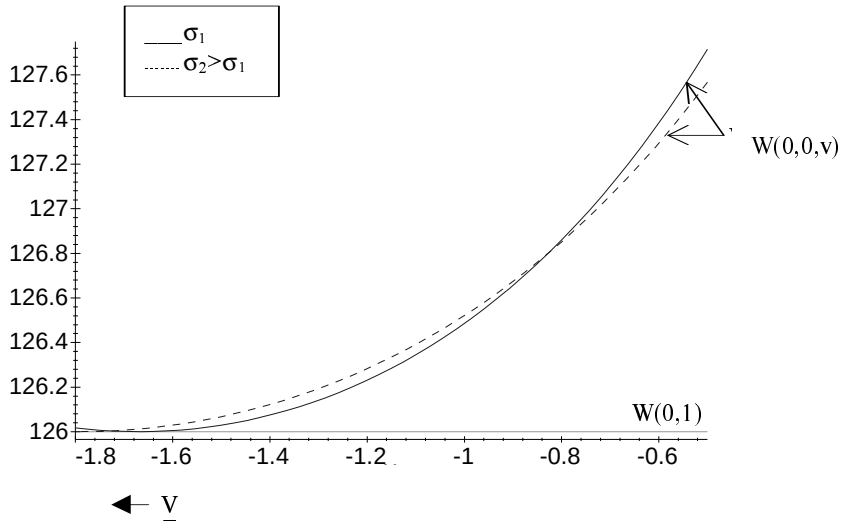


FIG. 2.8 – Effet de la hausse de σ^2 au voisinage de $\underline{v}$

2.5.2 Annexe B : impact de la volatilité sur le seuil d'investissement dans la *tech C*

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{v}}{d\sigma^2} &= \frac{1}{2(r-\frac{\sigma^2}{2})}+\frac{\beta_1^2 X}{\sigma^2(1+\beta_1)(X^2-1)\left[(1+\beta_1)X-A\right]}\\ &+\frac{\beta_1}{\sigma^2(1+\beta_1)}-\frac{\ln(X)}{2\beta_1\sigma^2}-\frac{\beta_1 X^2}{\sigma^2(1+\beta_1)(X^2-1)}\\ &-\frac{\beta_1(\beta_1-1)}{2\sigma^2(1+\beta_1)X\left[(1+\beta_1)X-A\right]}\end{aligned}$$

La dérivée totale de $\underline{v}$ par rapport à σ^2 ne peut être négative que dans certains cas particuliers. $\frac{d\underline{v}}{d\sigma^2} < 0$ et $\frac{dW(0,0,v)}{d\sigma^2} > 0$ au voisinage de $\underline{v}$, si et seulement si $K \to \frac{\bar{C}}{r}$ et $\sigma^2 > \sigma_m^2$. Les figures suivantes reproduisent l'effet d'une augmentation de l'incertitude dans cette situation particulière :et Pour un taux d'escompte r donné et pour

Les fonctions de valeur $W(0,0,v;\sigma_1)$ et $W(0,0,v;\sigma_2)$ se coupent à certain point et la

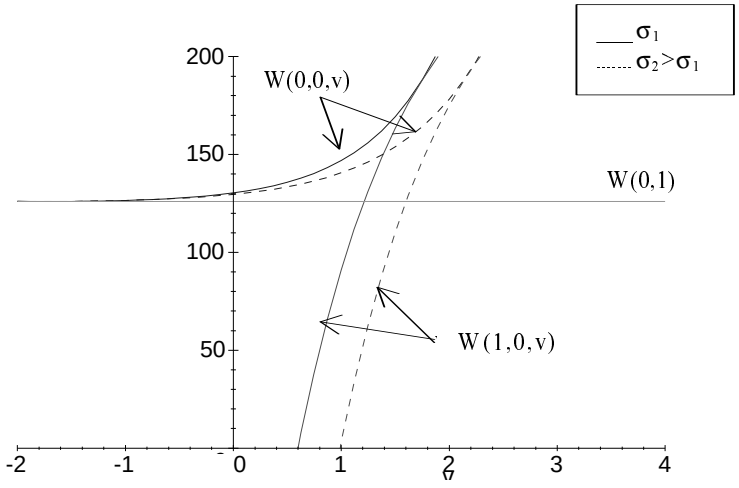


FIG. 2.9 – Effet de la hausse de σ^2 quand on s'éloigne de $\underline{v}$

valeur d'option remonte, faisant ainsi déplacer le seuil $\underline{v}$ vers la gauche. Dans ce cas, le seuil critique $\overline{v}$ tend vers $\widetilde{v}$, seuil d'investissement dans la technologie risquée lorsque la *tech C* n'est pas disponible.

Lorsque le coût d'acquisition K de l'actif certain tend vers la valeur présente des flux des coûts de production $\frac{\overline{C}}{r}$, l'avantage de la *tech C* par rapport à la technologie légère est presque inexistant. Quand le coût de production $C(v)$ est élevé et que l'investissement dans l'actif certain est imminent, l'effet direct de la volatilité prédomine l'effet de baisse de la valeur du projet incertain donnant ainsi plus de valeur à l'option.

C'est un cas extrême qui s'apparente au modèle où la technologie certaine n'est pas disponible et donc non pertinent pour notre analyse.

Chapitre 3

Choix de la diversification technologique dans un modèle d'options réelles

3.1 Introduction

L'aspect 'constitution et diversification de portefeuille' dans la décision d'investissement n'a pas été souligné ou discuté explicitement dans la littérature relative à la théorie d'options réelles. Comme nous allons le montrer, il y a une grande similitude entre le processus de décision d'investissement dans le cadre d'une analyse d'options réelles et le processus de construction et de sélection d'un portefeuille de titres financiers. Cependant l'analogie n'est pas parfaite et est limitée par la nature des actifs composant les deux types de portefeuilles.

La composition d'un portefeuille de titres peut résulter d'un ensemble de décisions indépendantes ou d'un plan (une stratégie) bien établi. Étant donné le nombre d'actifs possibles et les différentes proportions dans lesquelles un investisseur peut détenir chacun

d'eux, ce dernier structure son problème de façon à réduire le nombre d'alternatives. La théorie économique des choix, préconise une solution du problème en deux étapes. D'abord spécifier les options qui sont disponibles et ensuite spécifier comment choisir parmi ces options. Avec deux actifs ou deux titres uniquement, il est possible de constituer un nombre infini de portefeuilles en variant la proportion des fonds investis dans chacun des titres. Le choix des combinaisons possibles dans l'espace risque-rendement dépend des coefficients de corrélation entre les rendements des actifs. Plus le coefficient de corrélation est petit, plus les bénéfices inhérents à la diversification sont importants. Dans cet ensemble de portefeuilles possibles, l'investisseur sélectionne le portefeuille qui répond le mieux à ses besoins. Pour la sélection de portefeuille, plusieurs approches ou critères ont été développés : maximisation de l'utilité espérée, la maximisation de la moyenne géométrique du rendement, la dominance stochastique, etc.. La politique de gestion optimale conduit le plus souvent à une diversification du portefeuille. Cette gestion se fait d'une manière dynamique, dans le sens que l'investisseur procède à des arbitrages suivant les circonstances qui se présentent et les informations recueillies.

Une opportunité d'investissement réel peut donner accès à d'autres options, générant ainsi de la valeur pour l'investisseur. En effet, il y a possibilité de créer des options de croissance, par exemple, pour un investisseur qui choisit une expansion par étape, et donc une capacité de production plus flexible. Pindyck (1988) montre qu'en présence d'irréversibilité la capacité de production est plus faible et que la valeur de la firme est attribuable en grande partie à ses possibilités d'expansion. Brennan et Schwartz (1985) prennent l'exemple d'une mine pour déterminer la valeur de ce projet et les stratégies optimales de développement, d'exploitation et d'abandon. Paddock, Siegel et Smith (1987,1988) montrent qu'une firme qui détient un gisement de pétrole sous-estime son actif, si elle ne tient pas compte de l'opportunité de son développement dans le futur et des options ultérieures d'ajuster la production en fonction du prix observé, et même de la suspendre si nécessaire. McDonald et Siegel (1985) analysent la décision d'investissement dans un

projet discret avec une option de suspension temporaire de la production lorsque le profit courant est négatif. Dixit (1989) évalue simultanément les options d'entrée et de sortie dans un marché concurrentiel et détermine la règle optimale en terme de prix critiques pour chaque décision. Trigeorgis (1993) montre qu'il y a une interaction entre les différentes options réelles implicites dans un projet et que leurs valeurs ne sont pas toujours additives ; la valeur combinée des options d'exploitation peut avoir un effet significatif sur la valeur du projet.

L'opportunité d'investissement peut aussi incorporer plus d'une option si on considère les relations qui peuvent exister entre différents projets. Les projets peuvent être des substituts partiels, complémentaires ou mutuellement exclusifs. Dans le dernier cas, la décision consiste à retenir un seul projet : choix entre différentes technologies, différents produits, procédés de fabrication etc,. Childs, Ott et Triantis (1998) analysent l'interaction entre projets qui nécessitent une phase de développement et étudient le choix entre développement parallèle et séquentiel. He et Pindyck (1992) traitent le problème de choix de technologie et de capacité de production dans un modèle où la firme peut produire deux biens pour lesquels la demande est stochastique. La firme a l'opportunité d'investir dans un capital ou une technologie spécifique à la production d'un bien ou dans un capital flexible plus coûteux, qui peut servir à la fabrication de différents produits. La firme doit donc choisir une technologie de production et déterminer la quantité de capital à installer, sachant qu'elle peut élargir sa capacité plus tard si la demande évolue favorablement. Epaulard et Gallon (2001) étudient la décision de construction d'un prototype nucléaire EPR[1] qui assurera une flexibilité future au niveau du choix de technologie de production électrique. Les auteurs trouvent que cette flexibilité peut justifier l'investissement dans la centrale de référence, qui est considéré comme l'achat d'une assurance contre les aléas touchant la technologie concurrente envisagée. Dans la littérature des options réelles, les décisions

[1] European Pressurized Reactor.

d'acquisition et de répartition de ces options et actifs technologiques n'ont pas été encore envisagées dans le cadre de composition et de sélection d'un portefeuille technologique.

Une firme qui a une opportunité d'investir, commence par identifier et évaluer toutes les options éventuelles auxquelles elle peut prétendre. Ensuite, elle détermine sa stratégie d'investissement. Cette stratégie consiste à choisir l'ensemble d'options réelles qu'elle va détenir et à établir les règles optimales de gestion de ce portefeuille dans le temps. L'investisseur constitue ainsi un portefeuille d'options qui lui procure de la flexibilité, puisqu'il n'y a pas de réel engagement. Avec le passage du temps et suivant l'évolution des marchés qui l'intéressent, il prend ses décisions de convertir ses options en actifs réels. Ces décisions entraînent un changement irréversible de la composition du portefeuille. L'utilisation des options réelles s'accompagne d'une certaine restriction de la flexibilité de l'investisseur pour ses actions futures et déterminent le degré de son exposition à l'incertitude et donc le risque qu'il est prêt à accepter sur la valeur de ses actifs ; le risque étant la conséquence défavorable de son exposition à l'incertitude. La diversification en terme d'actifs réels doit également procurer un certain degré de flexibilité face aux aléas. Elle est généralement créatrice d'options secondaires ou accessoires à l'option ou aux options d'investissement principales.

D'après ce qui précède, nous pouvons déjà voir qu'il existe une analogie entre le processus de décision d'investissement dans le cadre d'une analyse d'options réelles et le processus de construction et de sélection d'un portefeuille de titres. Les gestionnaires commencent à penser à la valeur de leurs entreprises en termes d'options réelles et à leurs stratégies d'investissement en termes de constitution de portefeuilles d'options réelles.

Le rapprochement entre un portefeuille de titres financiers et un portefeuille d'actifs et d'options réelles et les limites de cette comparaison n'ont pas été explicitement abordés dans la littérature relative à la théorie d'options réelles.

Nous nous proposons d'étudier le problème de la diversification des risques, par choix des technologies de production, dans le cadre d'un modèle d'options réelles. Nous analysons

les décisions d'investissement dans des unités de production recourant à des technologies différentes et menant à l'établissement d'un parc d'installations de production qui constitue en quelque sorte un portefeuille d'actifs réels permettant une certaine diversification du risque.

He et Pindyck (1992) exposent, sans le résoudre, le problème d'une firme "multi-input" qui fait face à des coûts de facteurs incertains et qui a le choix d'installer un capital spécifique à un intrant ou un capital flexible. Notons que dans ce modèle il n'est pas permis à la firme de détenir simultanément les deux types de capital. Cette dernière partie du travail de He et Pindyck constitue le point de départ de notre démarche.

Pour adapter l'approche des options réelles à cette notion de diversification dans le cadre d'investissements réels, nous construisons un modèle en temps continu où la firme détient une opportunité d'entrer sur un marché par l'acquisition d'installations de production coûteuses. La demande du marché pour le bien produit est certaine. La production peut être assurée par deux types d'actifs représentant chacun une technologie qui utilise un input spécifique. L'incertitude trouve sa source dans le marché de l'un des facteurs de production : l'une des technologies utilise un facteur de production dont le prix varie de façon aléatoire, tandis que l'autre technologie se caractérise par un coût de production certain.

L'entrée sur le marché en question peut se faire par étapes. La firme commence par investir dans une certaine capacité en choisissant l'une des deux technologies de production disponibles. Elle devient ainsi opérationnelle tout en se dotant également d'une option d'élargir ses installations productives par l'acquisition d'une deuxième unité de production utilisant l'une ou l'autre des technologies disponibles. La firme n'a pas la possibilité de choisir entre un équipement flexible et un équipement spécifique, comme dans He et Pindyck (1992) ; cependant, les options de fractionner l'investissement et de diversifier les technologies de production ouvrent des possibilités du même type. La différence réside dans l'avantage d'une expansion par étapes qui permet à la firme de redresser la situa-

tion ou de limiter les dégâts si la suite des événements ne lui donne pas raison en ce qui concerne son choix initial de technologie. Elle se laisse ainsi une opportunité de profiter de l'incertitude ou de se protéger contre le risque.

En outre, la firme peut créer une option de permutation (switch) si elle diversifie ses actifs. Cette option consiste à pouvoir intensifier l'exploitation des installations qui opèrent avec la technologie la moins coûteuse. Avec cette option la firme se dote d'un instrument de gestion dynamique de son investissement dont on ne trouve pas l'analogue dans un portefeuille de titres financiers. Si les réalisations sur le marché de l'input stochastique sont favorables, elle utilise à pleine capacité la technologie incertaine et réduit ainsi ses coûts de production. Par contre si les réalisations sont défavorables à la technologie incertaine, elle intensifie l'exploitation de la technologie dont le prix d'input est certain et limite ainsi l'augmentation de ses coûts de production [2].

Nous avons identifié les principales options attachées aux opportunités d'investissement de la firme. Dans le modèle présenté plus bas, nous limitons la firme à l'acquisition d'un maximum de deux unités de production. La firme peut donc se doter des portefeuilles de technologie suivants : une unité de la technologie certaine ; une unité de la technologie incertaine ; deux unités de la technologies certaine ; deux unités de la technologie incertaine ; une unité de chacune des deux technologies. Elle doit choisir entre ces possibilités et choisir la manière d'acquérir ces portefeuilles, c'est à dire choisir les dates d'acquisition de chacune des unités de production. La firme peut éviter de s'exposer à l'incertitude en choisissant la technologie certaine. Néanmoins, elle renonce ainsi à tirer le meilleur parti de cette incertitude et à profiter de la valeur additionnelle qui découle de toutes les options qu'elle crée par sa présence. La valeur finale de la firme est déterminée par l'utilisation

[2] Nous limitons les options créées par cette opportunité d'investissement à celles énumérées dans le but de ne pas compliquer la résolution du problème. Nous pourrions imaginer que la firme détienne une option de suspendre temporairement l'exploitation de l'un ou l'autre des actifs ou encore de l'abandonner définitivement.

des options à chaque étape. Les décisions envisageables, dépendent de l'évolution de l'environnement externe de la firme. La première décision est relative à la date de réalisation de la première étape de l'investissement et au type de technologie de production à installer. Cette étape se traduit par la délimitation d'intervalles pour les valeurs de la variable aléatoire qui correspondent à trois régions : une région centrale d'inaction ou d'attente, une région supérieure où il est optimal de procéder à un premier investissement par l'acquisition de l'actif certain et enfin une zone inférieure où il est plus profitable d'investir dans l'actif incertain. À l'issue de cette phase, la firme détient encore l'option d'expansion par choix entre les deux types d'actifs. L'exercice de cette option est déterminé par une règle de décision analogue à celle qui régit le premier investissement. Finalement, la firme se trouve en possession d'une capacité de production complète. Suivant l'évolution de l'incertitude qui a dicté ses décisions, elle peut détenir un seul type d'actif ou les deux types d'actifs avec l'option de permutation. La firme calcule sa valeur à chaque étape de ce processus et pour chaque issue éventuelle. Et chaque décision est prise dans le but de maximiser la valeur de la firme étant donné toute l'information dont elle dispose. À l'issue du processus, la firme se trouve en possession d'un portefeuille d'unités de production figé. C'est en cela que l'irréversibilité des investissements réels introduit une seconde différence avec un portefeuille financier : la firme ne peut plus modifier son portefeuille alors qu'un portefeuille financier peut l'être en tout temps.

La stratégie d'investissement de la firme est donc décrite par les actions à entreprendre ou à ne pas entreprendre selon l'évolution des évènements externes. Nous montrons que la stratégie d'investissement est comparable à une sélection de portefeuille d'actifs qui se fait d'une façon dynamique à travers le temps et qui dépend des options considérées au début du problème et de l'information nouvellement acquise. L'évaluation d'un projet dépend des installations de production en place et la diversification du portefeuille d'actifs réels stimule l'investissement.

Dans la section 2, nous présentons une description générale du modèle et toutes les

étapes de résolution par la programmation dynamique du modèle standard d'investissement. Nous consacrons les sections 3, 4 et 5 à l'évaluation des fonctions de valeur et à la détermination des règles de décision relatives à l'exercice de l'option d'expansion. Dans la section 6, nous traitons la décision d'entrée sur le marché. Nous analysons les décisions de la firme dans la section 7 et présentons les résultats de la résolution numérique du modèle, dans la section 8. Nous concluons par la section 9.

3.2 Description du modèle et considérations préliminaires :

3.2.1 Présentation générale du modèle :

Nous considérons un marché final où le prix est réglementé, donné de façon exogène au producteur. La firme peut être considérée comme un monopole réglementé. Ses décisions n'ont pas d'effet sur le marché du produit. Les recettes de vente de la firme sont : R_1 $(P_m q)$ si elle possède une unité de production, et R_2 $(\frac{3}{2}P_m q)$ si elle opère avec deux unités. Ses décisions portent sur le choix de la technologie, donc sur le coût de production. Étant donné la demande du marché et le prix fixé (P_m) [3], la quantité maximale produite et écoulée est de $\frac{3}{2}q$. L'unité de production étant de capacité fixe q, la firme est contrainte à posséder une capacité $2q$ si elle décide d'approvisionner le marché avec une quantité $\frac{3}{2}q$.

Deux technologies de production sont disponibles. Elles diffèrent au niveau du coût de production. La première technologie induit un coût de production unitaire c, inférieur à P_m, connu avec certitude ; nous la désignons par technologie certaine ou encore *tech C*. C'est le cas par exemple d'une technologie qui utilise des produits intermédiaires ou des intrants dont les prix sont si peu volatils, que nous pouvons les considérer comme certains. Avec la deuxième technologie, le coût de production unitaire v est une variable stochastique. On peut imaginer que la technologie dépend essentiellement d'un intrant

[3] Figure 3.1

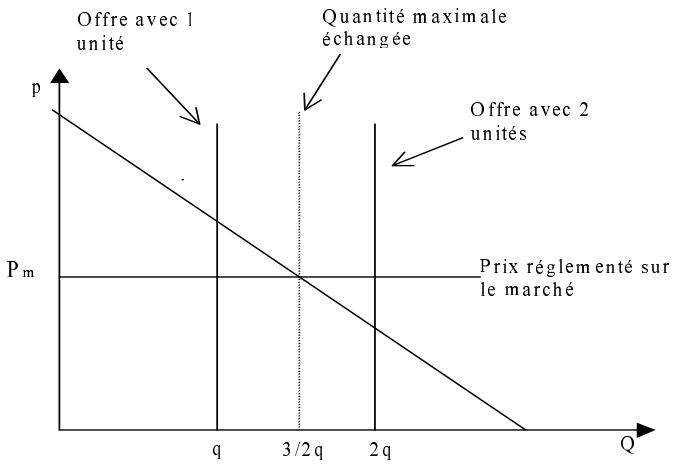


FIG. 3.1 – Marché du produit final

dont le prix est volatil. Nous postulons que v suit un processus Brownien Géométrique sans dérive.

$$\frac{dv}{v} = \sigma dz \tag{3.1}$$

v est une variable dont la valeur courante et la variance $\sigma^2 dt$ de son taux de croissance sont connus. La valeur espérée[4] de v_t est :

$$E_0(v_t) = v_0 \tag{3.2}$$

et sa variance est :

$$Var_0(v_t) = v_0^2(e^{\sigma^2 t} - 1). \tag{3.3}$$

[4] Dixit et Pindyck(1994, p.71)

Le coût d'acquisition d'installation de production de capacité q est I quelle que soit la technologie. C'est un coût qui n'est pas récupérable de par la spécificité des installations.

Nous supposons que la firme a la possibilité d'acquérir deux unités de production discrètes chacune de capacité q. Ex-post, elle peut au maximum avoir à son actif deux unités de la même technologie de production ou bien une unité de chaque. Nous n'imposons aucune contrainte quant à la cadence des investissements. Autrement dit, il est possible pour la firme d'acheter les deux unités simultanément, de façon séquentielle ou jamais.

Les coûts de suspension de la production ou d'abandon des équipements sont suffisamment élevés pour exclure ces deux possibilités, ex-post. Une fois établie sur le marché, la seule alternative pour la firme est de continuer à produire même si son coût unitaire (marginal) de production passe au-dessus du prix du marché.

Le problème d'investissement de la firme, est résolu par la méthode de programmation dynamique. Cette méthode de résolution prend le taux d'actualisation exogène constant. Ce dernier trait donne matière à une évaluation subjective du risque par le décideur. Une approche neutre au risque peut être utilisée pour l'évaluation des options réelles. Elle consiste à établir une position de couverture constituée par un portefeuille qui se compose de la firme et d'une position courte sur l'actif sous-jacent. Lorsque la valeur de l'actif fluctue, la composition du portefeuille change pour maintenir une position de couverture sans risque. La valeur d'option dans ce cas ne dépend d'aucun facteur dont la valeur est déterminée par l'attitude envers le risque. Nul besoin d'une évaluation d'une prime de risque ou d'hypothèse sur les préférences au risque, il n'y a que le taux d'intérêt sans risque qui est nécessaire et qui est pris d'une façon exogène. Une évaluation équivalente par la méthode de programmation dynamique revient à utiliser le taux d'intérêt sans risque comme taux d'escompte et à ajuster la tendance déterministe du flux de profit par la prime de risque découlant de l'équilibre du marché des actifs. Dans ce travail, nous laissons de côté la discussion sur le choix du taux d'escompte r, que nous allons considérer comme un taux constant spécifié de façon exogène.

3.2.2 Résolution du problème d'investissement dans une seule technologie

Nous commençons par le problème standard d'options réelles où la firme a l'opportunité d'investir dans deux unités de production identiques dont la valeur future est incertaine. Ce problème servira de référence pour examiner l'impact de la possibilité de diversification et la constitution d'un portefeuille de technologies. Il s'agit d'opérer sur le marché qui a été décrit plus haut en utilisant la seule technologie disponible, *tech I*. La stratégie d'une entrée sur le marché par l'installation graduelle de la capacité de production domine celle d'un investissement unique et simultané dans toute la capacité, lorsque le coût de production unitaire initialement observé est au-dessus d'un certain seuil.

Comme dans tout problème d'options réelles, la firme compare la valeur de l'attente i.e.. sa valeur lorsqu'elle garde en vie son option d'investir (le coût d'opportunité de l'exercice) à la valeur espérée nette du projet qu'elle recevrait si elle exerçait son option. La règle de décision est de s'abstenir d'investir tant que la valeur de l'attente est plus élevée.

À la première étape, la firme décide du moment optimal d'investir dans la $1^{ère}$ unité de production. Elle compare sa valeur lorsqu'elle est inactive et possède l'option d'investir dans deux unités (successivement), à sa valeur lorsqu'elle exploite une capacité q et détient une option de croissance. Une fois la première étape franchie, le problème de la firme consiste à déterminer la date d'exercice de l'option d'augmenter sa capacité de production à $2q$.

Pour trouver la règle d'investissement de la firme, ce problème est résolu à rebours, en commençant par la décision d'expansion.

Décision d'exercer l'option d'expansion

Soit $W(2, v)$ la valeur finale du projet. Le premier argument désigne le nombre d'unités de production possédé par la firme et le deuxième argument la variable d'état, c'est à dire

le coût unitaire de production.

Lorsque la firme produit avec deux unités une quantité $\frac{3}{2}q$, elle tire un revenu R_2 et supporte un coût de production de $\frac{3}{2}vq$. À tout t, sa valeur est :

$$W(2,v) = E_t \int_t^{\infty} e^{-r(s-t)}(R_2 - \frac{3}{2}v_s q)ds$$

$$W(2,v) = \frac{R_2}{r} - \frac{3}{2}\frac{v}{r}q. \tag{3.4}$$

Soit $F(1,v)$ la valeur de la firme qui opère avec une capacité q et qui détient une opportunité d'ajouter une seconde unité de production de la même capacité. L'équation de Bellman, qui décrit le problème de la firme contraint par le mouvement de v à tout t, est :

$$F(1,v) = \max\left\{W(2,v) - I \ ; \ (R_1 - vq)\Delta t + \frac{1}{(1+r\Delta t)}E\left[F(1, v+\Delta v) \ /v\right]\right\}.$$

C'est un problème d'arrêt optimal en temps continu, qui consiste à déterminer la valeur de v en dessous [5] de laquelle il est optimal d'investir (arrêter) pour recevoir une valeur présente espérée $(W(2,v) - I)$ et au-dessus de laquelle il est optimal d'attendre tout en continuant à détenir l'option d'expansion (continuer).

La valeur de continuation est composée par un flux de profit courant provenant de l'exploitation de l'unité de production en place et par la valeur présente espérée de détenir encore l'option d'expansion sur un intervalle de temps Δt. À chaque instant la firme compare cette valeur de l'attente, à celle du projet nette du coût d'investissement. Lorsque l'attente est optimale sur Δt, la valeur de continuation est :

[5] Les fonctions de valeur sont décroissantes en v. La région d'arrêt est en dessous de la valeur critique et la région de continuation est au- dessus de cette valeur.

$$F(1,v) = (R_1 - vq)\Delta t + \frac{1}{(1+r\Delta t)} E\left[F(1, v+\Delta v)\ /v\right].$$

Multiplions par $(\frac{1+r\Delta t}{\Delta t})$:

$$rF(1,v) = (R_1 - vq)(1+r\Delta t) + \frac{1}{\Delta t} E\left[F(1, v+\Delta v) - F(1,v)\ /v\right].$$

Quand $\Delta t \to 0$ [6]

$$rF(1,v) = (R_1 - vq) + \frac{1}{dt} E\left[dF\right]. \tag{3.5}$$

L'équation (3.5) dit que sur un intervalle de temps dt, le rendement espéré du portefeuille de la firme $(rFdt)$ doit être égal au flux courant de revenu plus le gain en capital espéré $(E\left[dF\right])$, étant donné le processus de v (3.1). La différentielle dF est donnée par le lemme d'Ito :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} (dv)^2.$$

Utilisons l'équation de mouvement de v et appliquons l'opérateur d'espérance à dF :

$$E\left[dF\right] = \frac{\sigma^2}{2} v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dt.$$

Remplacer $E\left[dF\right]$ dans (3.5) donne l'équation différentielle partielle de degré 2, appelée aussi équation de Bellman, que doit satisfaire la fonction de valeur $F(1,v)$ dans la région de continuation.

$$\frac{\sigma^2}{2} v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - rF + (R_1 - vq) = 0. \tag{3.6}$$

L'équation (3.6) capte les relations dynamiques entre la fonction de valeur $F(1,v)$ et la variable d'état v, valeur de l'actif sous-jacent. Elle admet une solution particulière : $(\frac{R_1}{r} -$

[6] $E(dF)$ est l'espérance du gain en capital conditionnelle à v.

$\frac{v}{r}q$) et une solution complémentaire : $A_1 v^{\beta_1} + A_2 v^{\beta_2}$ qui est une combinaison linéaire des deux solutions correspondant aux racines β_1 et β_2. Ces dernières sont respectivement les racines, positive et négative, de l'équation caractéristique obtenue en substituant la solution générale de la forme Av^{β}, dans la partie homogène de l'équation différentielle partielle (3.6) :

$$\frac{\sigma^2}{2}\beta^2 - \frac{\sigma^2}{2}\beta - r = 0$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2r}{\sigma^2}} \tag{3.7}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2r}{\sigma^2}}. \tag{3.8}$$

Notons que β_1 est supérieur à 1 du moment que r et σ^2 sont strictement positifs.

Une des conditions terminale permet d'éliminer le terme $A_1 v^{\beta_1}$. En effet, lorsque le coût de production v tend vers l'infini, la valeur de l'option d'investir dans la *tech I* tend vers zéro. Nous fixons donc $A_1 = 0$. La solution complète de l'équation (3.6) est :

$$F(1, v) = A_2 v^{\beta_2} + (\frac{R_1}{r} - \frac{v}{r}q), \tag{3.9}$$

où A_2 est une constante positive à déterminer. Cette solution se compose de deux termes. Le premier représente la valeur de l'opportunité d'ajouter une capacité q et le deuxième terme, la valeur des profits espérés si la firme opère avec une capacité q pour toujours sans jamais exercer son option d'expansion.

La date optimale d'investir exprimée par une valeur critique $\overline{v}_{ii}$ de v, au-dessous de laquelle la firme exerce son option d'expansion, doit satisfaire deux conditions. Au moment d'investir, il faut que la valeur du projet $W(2, v)$ couvre le coût total de l'investissement : coût direct I et coût d'opportunité $F(1, v)$. Ou encore, il faut que les profits cumulés additionnels que la firme espère retirer de l'ajout de la seconde unité de production, nets

du coût direct d'investissement égalent la valeur de l'option perdue. En outre, à la date optimale d'exercice, la variation marginale de la valeur d'option doit aussi être égale à la variation marginale des profits cumulés additionnels. Ces deux conditions s'écrivent comme suit.

- Condition de continuité ou d'égalité de valeurs :

$$F(1, \overline{v}_{ii}) = W(2, \overline{v}_{ii}) - I$$

$$A_2 \overline{v}_{ii}^{\beta_2} = \frac{R_2 - R_1}{r} - \frac{1}{2}\frac{\overline{v}_{ii}}{r} q - I. \tag{3.10}$$

- Condition de tangence ou de contact tangentiel :

$$\frac{\partial F}{\partial v}(1, \overline{v}_{ii}) = \frac{\partial W}{\partial v}(2, \overline{v}_{ii})$$

$$\beta_2 A_2 \overline{v}_{ii}^{(\beta_2 - 1)} = -\frac{1}{2}\frac{q}{r}. \tag{3.11}$$

Ces deux conditions permettent de compléter la spécification de la fonction de valeur $F(1, v)$ par la détermination de la constante A_2 et de décrire la règle de décision par le seuil critique $\overline{v}_{ii}$.

$$A_2 = -\frac{q}{2r\beta_2} \overline{v}_{ii}^{(1-\beta_2)}$$

$$\overline{v}_{ii} = 2\frac{\beta_2}{\beta_2 - 1}\left(\frac{R_2 - R_1}{q} - \frac{rI}{q}\right) \tag{3.12}$$

$$F(1, v) = \frac{1}{1 - \beta_2}\left(\frac{R_2 - R_1}{r} - I\right)\left(\frac{v}{\overline{v}_{ii}}\right)^{\beta_2} + \left(\frac{R_1}{r} - \frac{v}{r} q\right)$$

Le premier terme de $F(1,v)$ est la valeur présente espérée associée à l'ajout d'une capacité de production q au moment où les réalisations du coût atteignent $\overline{v}_{ii}$, étant donné le coût de production courant observé.

Dans les cas déterministe où les réalisations futures du coût v sont connues avec certitude, la firme n'achète la seconde unité de la *tech I* que si v est inférieur à $[2(\frac{R_2-R_1}{q} - \frac{rI}{q})]$. Lorsque nous introduisons l'incertitude, le seuil d'investissement est multiplié par le coefficient $\frac{\beta_2}{\beta_2-1} < 1$, l'investissement se fait à un coût de production plus faible. En incertitude, il y a une prime de flexibilité associée à la détention de l'option d'expansion qui justifie et motive le report de la décision d'investissement.

La solution donnée par l'équation (3.9) est valide pour $v > \overline{v}_{ii}$. Lorsque v passe audessous de $\overline{v}_{ii}$ la firme exerce son option et $F(1,v)$ prend la valeur $(W(2,v) - I)$.

Décision d'exercer l'option d'entrer sur le marché

Connaissant maintenant la valeur $F(1,v)$ de la firme à l'issue de la première étape, nous y revenons pour déterminer la règle d'investissement dans la première unité de production.

La firme inactive a une valeur $F(0,v)$ représentant la valeur de ses options d'investissement. Lorsqu'elle acquiert une unité de production, elle se transforme en une firme qui produit q, détient l'option de développer sa capacité à $2q$ et vaut $F(1,v)$. Pour la détermination de la fonction de valeur $F(0,v)$ nous procédons de la même façon que précédemment. Pour tout t, le problème de la firme inactive est le suivant :

$$F(0,v) = \max\left\{F(1,v) - I, \frac{1}{1+r\Delta t}E\left[F(0,v+\Delta v)/v\right]\right\}.$$

Dans la région de continuation et sur un intervalle $dt \to 0$, nous avons l'égalité entre le rendement du portefeuille d'options et le gain en capital :

$$rF(0,v) = \frac{1}{dt}E\left[dF\right].$$

L'équation de Bellman vérifiée par la fonction de valeur $F(0,v)$ dans la région de continuation est :

$$\frac{\sigma^2}{2}v^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - rF = 0 \tag{3.13}$$

dont la solution complète est de la forme : $B_1 v^{\beta_1} + B_2 v^{\beta_2}$ où β_1 et β_2 sont définis plus haut. Puisque l'option n'a plus de valeur, lorsque le coût v tend vers l'infini, nous éliminons le terme avec l'exposant positif en fixant $B_1 = 0$.

$$F(0,v) = B_2 v^{\beta_2}. \tag{3.14}$$

La règle d'investissement dans la première unité de production est définie par un coût critique $\overline{v}_i$. Le premier investissement est déclenché par toute réalisation de $v \leq \overline{v}_i$. Au moment optimal d'installer une capacité q, la valeur du projet à recevoir nette du coût direct d'exercice doit égaliser la valeur du portefeuille d'options perdu. De même, pour les changements des valeurs marginales par rapport à une variation de la valeur de v.

- Condition d'égalité de valeurs :

$$F(0,\overline{v}_i) = F(1,\overline{v}_i) - I$$

$$B_2\overline{v}_i^{\beta_2} = A_2\overline{v}_i^{\beta_2} + \frac{R_1}{r} - \frac{\overline{v}_i}{r}q - I. \tag{3.15}$$

- Condition de tangence :

$$\frac{\partial F}{\partial v}(0,\overline{v}_i) = \frac{\partial F}{\partial v}(1,\overline{v}_i)$$

$$\beta_2 B_2\overline{v}_i^{(\beta_2-1)} = \beta_2 A_2\overline{v}_i^{(\beta_2-1)} - \frac{q}{r}. \tag{3.16}$$

L'équation (3.15) peut s'écrire d'une façon qui exprime l'égalité entre, d'une part, la valeur de l'option d'entrer sur le marché avec une capacité q nette de l'option d'expansion et, d'autre part, la valeur présente espérée des flux de profits découlant de la vente d'une quantité q sur le marché, nette du coût d'installation :

$$B_2\overline{v}_i^{\beta_2} - A_2\overline{v}_i^{\beta_2} = \frac{R_1}{r} - \frac{\overline{v}_i}{r}q - I. \tag{3.17}$$

Les conditions (3.15) et (3.16) donnent les valeurs de B_2 et $\overline{v}_i$

$$B_2 = A_2 - \frac{q}{\beta_2 r}\overline{v}_i^{(1-\beta_2)}$$

$$\overline{v}_i = \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1}(\frac{R_1}{q} - \frac{rI}{q}). \tag{3.18}$$

Le seuil critique est, comme pour la seconde unité, égal au seuil d'investissement en certitude ($\frac{R_1}{q} - \frac{rI}{q}$) multiplié par le coefficient $\frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} < 1$, qui traduit l'impact de l'incertitude sur la décision d'investissement.

L'écart entre les deux valeurs critiques $\overline{v}_i$ et $\overline{v}_{ii}$ est positif,

$$\overline{v}_i - \overline{v}_{ii} = \frac{2\beta_2}{(\beta_2 - 1)q}\left[(\frac{3}{2}R_1 - R_2) + \frac{1}{2}rI\right] > 0,$$

puisque $(\frac{2\beta_2}{(\beta_2 - 1)q}) > 0$ ($\beta_2 < 0$ et $q > 0$) et $\left[(\frac{3}{2}R_1 - R_2) + \frac{1}{2}rI\right] = \frac{1}{2}rI > 0$. Si le coût de production v observé est supérieur à $\overline{v}_{ii}$, il est préférable pour la firme d'entrer sur le marché par étape, en commençant par l'installation d'une capacité q dès que les réalisations du coût passent au-dessous de $\overline{v}_i$. Elle devient ainsi productive en se réservant une option de développer sa capacité dans le futur. La figure 3.2 [7] illustre la règle de décision pour les deux étapes d'investissement.

- $v > \overline{v}_i$: attendre

[7] $W(2, v)$ et $F(1, v)$ sont nettes des coûts d'investissement.

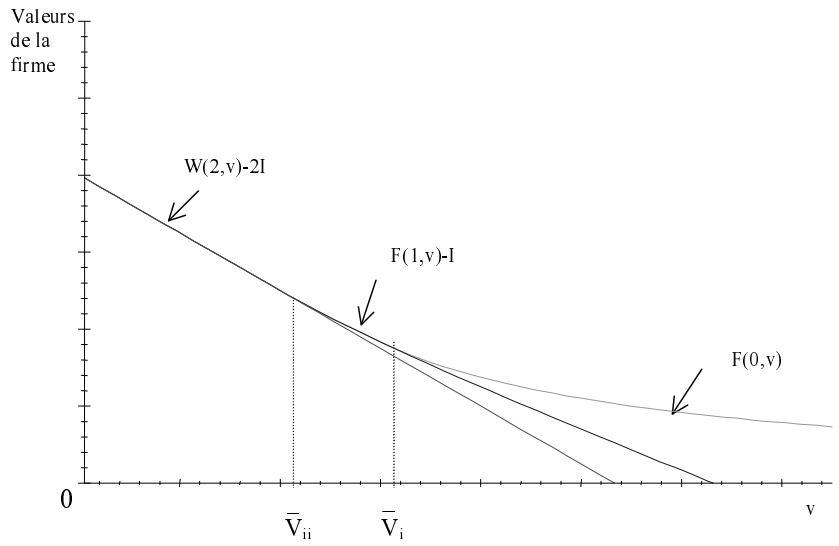


FIG. 3.2 – Décision d'investissement dans le cas d'une seule technologie

- $\overline{v}_{ii} < v < \overline{v}_i$: investir immédiatement dans une première unité de la *tech I*, si la firme est inactive.
- $v < \overline{v}_{ii}$: investir immédiatement dans une deuxième unité si la firme est opérationnelle avec une capacité q et dans deux unités si elle est inactive.

Notons que nous retrouvons les résultats standards des modèles d'options réelles. L'augmentation de la volatilité du coût de production entraîne une baisse des seuils critiques et donc un report des décisions d'investissement. Les valeurs d'options augmentent et la firme va attendre que le coût baisse suffisamment pour que la rentabilité des projets (décroissante en v) justifie la perte de ses options.

3.2.3 Modèle avec deux technologies concurrentes

Nous introduisons maintenant dans le modèle la technologie de production certaine concurrente à la *tech I.* Le produit final peut être fabriqué à travers deux processus de production différents. L'installation d'une unité de production de capacité q de la *tech C,* entraîne des coûts initiaux de I, les mêmes coûts d'investissement que pour la *tech I.* Cependant, à la différence de cette dernière les coûts de production futurs sont connus avec certitude. Le coût de production unitaire c est tel que l'investissement dans la *tech C* est rentable même lorsque l'unité de production n'est exploitée qu'à moitié de sa capacité :

Hypothèse 1 : le bénéfice cumulatif de produire et vendre une quantité $\frac{1}{2}q$ est plus grand que le coût d'acquisition d'une capacité q : $\frac{R_2-R_1}{r} - \frac{1}{2}\frac{cq}{r} > I$

Tout report de l'investissement occasionne un manque à gagner au moins égal au revenu que la firme aurait pu réaliser en installant la *tech C.* Si la firme choisit de s'exposer à l'incertitude, elle va exiger un taux de rendement de son projet qui compense le risque et les profits auxquels elle a renoncé. Et c'est l'information acquise en observant les réalisations du coût de la *tech I* qui lui permet de comparer les deux actifs et de décider s'il est avantageux de reporter l'investissement dans l'une ou l'autre des technologies, de choisir immédiatement la technologie incertaine ou de se rabattre sur le choix évident et sûr.

Nous avons donc une firme qui a la possibilité d'investir dans deux unités de production de capacité q chacune et dont l'option d'investissement se divise en autant d'options que de technologies disponibles à chaque étape de décision.

Comme la firme choisit la technologie de production, tant pour sa première que pour sa deuxième unité, elle choisit la composition technologique de ses installations de production et, par conséquent le degré de risque qu'elle est prête à assumer quant à ses profits futurs. Par ailleurs, si elle diversifie sa technologie de production, la firme se dote d'une certaine flexibilité ex-post. En effet, elle a dans ce cas la possibilité de varier l'intensité ou le taux d'utilisation des unités de production, selon le coût de la *tech I.* La firme utilisera

à fond la technologie qui présente les coûts de production les plus bas à tout instant et exploitera à demi-capacité la technologie la plus coûteuse ; elle changera son organisation de la production si la situation se renverse. Nous supposons que le coût de transition d'un type d'exploitation à un autre est nul.

Avant de passer à la résolution du problème, nous allons présenter brièvement la décision d'investissement dans le cas certain i.e.. lorsque le coût v est connu et constant. Dans ce cas, étant donné que les coûts d'investissement et les capacités des unités de production sont les mêmes avec les deux technologies, la firme investit immédiatement dans deux unités de la technologie qui a le plus faible coût de production. Si $v > c$, elle achète deux unités de production de la *tech C* d'un coup ; dans le cas contraire, elle acquiert deux unités de la *tech I*. Lorsque $v = c$, les deux technologies sont équivalentes et la firme est indifférente entre les deux et c'est le seul cas de figure où elle peut choisir de diversifier ses technologies de production. Le niveau $v^* = c$ est un seuil par rapport auquel la firme se situe pour prendre sa décision d'investissement.

Dans les sections suivantes nous allons présenter les étapes de résolution du problème dans le cas incertain. Nous commençons par déterminer les valeurs finales de la firme une fois réalisées chacune des séquences des investissements possibles. Nous suivons, en commençant par la fin, le cheminement décisionnel qui permet à la firme d'aboutir à chaque valeur finale possible du projet. Nous consacrons la section 4 à la détermination de la valeur de l'attente et de la règle optimale d'investissement lorsque la firme possède une capacité q de la technologie certaine et une option d'expansion. Dans la section 5, nous abordons le deuxième cas de figure où la firme produit une quantité q avec la technologie incertaine et a une option d'expansion. La règle d'investissement dans la première unité de production est déterminée dans la section 6.

3.3 Détermination des fonctions de valeurs finales

Avec le choix technologique disponible pour le premier et le second investissement, à l'issue de la $2^{ème}$ étape, le portefeuille d'actifs de la firme peut être composé par des unités de production identiques ou par des unités techniquement diversifiées.

3.3.1 Valeurs de la firme non diversifiée

La valeur de la firme qui possède deux unités de la même technologie est la valeur présente cumulée des profits espérés de la date courante jusqu'à l'horizon de temps considéré, l'infini dans notre cas.

Appelons $W(i, j, v)$ la valeur de la firme en possession de i unités de la *tech I* et de j unités de la *tech C* installées.

La valeur de la firme avec un portefeuille constitué de deux actifs certains à tout t :

$$W(0,2) = E_t \int_t^{\infty} e^{-r(s-t)}(R_2 - \frac{3}{2}cq)ds$$

$$W(0,2) = \frac{R_2}{r} - \frac{3}{2}\frac{cq}{r}. \tag{3.19}$$

La valeur de la firme avec un portefeuille constitué de deux actifs incertains[8] à tout t **:**

$$W(2,0,v) = \frac{R_2}{r} - \frac{3}{2}\frac{vq}{r}. \tag{3.20}$$

3.3.2 Valeur de la firme technologiquement diversifiée :

La firme qui est diversifiée au niveau technologique possède l'option d'adapter l'organisation de sa production aux réalisations du coût v. Elle peut organiser sa production en utilisant à pleine capacité l'unité qui a l'avantage au niveau des coûts de production et à

[8] voir équation (3.4)

mi-capacité l'unité la plus coûteuse. Par hypothèse, la transition d'une utilisation à 100% à une utilisation à 50% ne coûte rien à la firme et se fait instantanément.

Pour trouver la valeur de la firme dans ce cas nous adaptons le travail de McDonald et Siegel (1985). Ils considèrent un projet où la production peut être suspendue temporairement et sans coût, chaque fois que le prix de vente passe au dessous du coût variable et qui peut être reprise plus tard si le prix remonte au-dessus du coût. Ils évaluent ce projet en considérant cette possibilité de suspension comme une option que la firme peut décider d'exercer à chaque instant si les réalisations du prix le justifient.

Dans notre modèle nous allons considérer la transition d'un mode d'organisation de la production à un autre comme l'exercice d'une option. À chaque instant la firme observe le coût v réalisé et décide de garder l'organisation de sa production comme elle est ou de passer à l'organisation alternative.

Soit $\pi_1(v)$ le profit instantané, lorsqu'une quantité q est produite avec la *tech C* et une quantité $\frac{q}{2}$ est produite avec la *tech I*

$$\pi_1(v) = R_2 - cq - \frac{1}{2}vq.$$

Et soit $\pi_2(v)$ le profit instantané, lorsque la firme produit q avec la *tech I* et $\frac{q}{2}$ avec la *tech C*

$$\pi_2(v) = R_2 - \frac{1}{2}cq - vq.$$

Le profit instantané de la firme dans ce cas est : $\pi(v) = \max\{\pi_1(v), \pi_2(v)\}$

$$\pi(v) = \begin{cases} \pi_1(v) & \text{si } v > c \\ \pi_2(v) & \text{si } v < c \end{cases}$$

À tout t, le problème de gestion de la production de la firme diversifiée, de valeur $W(1,1,v)$, est le suivant [9] :

[9] L'espérance est conditionnelle à la valeur courante de v.

$$W_i(1,1,v) = \max\left\{W_j(1,1,v)\ ;\ \pi_i(v)\Delta t + (1+r\Delta t)^{-1}E\left[W_i(1,1,v+\Delta v)\right]\right\} \qquad (3.21)$$

$W_i(1,1,v)$ est la valeur de l'organisation courante et $i,j \in \{1,2\}$ tels que $i \times j = 2$. L'équation différentielle partielle qui définit la fonction $W_i(1,1,v)$ et la relie à la dynamique de la variable stochastique v est :

$$\frac{\sigma^2}{2}v^2 W_i'' - rW_i + \pi_i(v) = 0. \qquad (3.22)$$

La solution de cette équation dépend de l'état courant défini par l'avantage d'une technologie sur l'autre en termes de coûts de production.

- La solution complète de l'équation (3.22) lorsque $i = 1$ $(v > c)$ est :

$$W_1(1,1,v) = K_1 v^{\beta_1} + K_2 v^{\beta_2} + (\frac{R_2}{r} - \frac{cq}{r} - \frac{1}{2}\frac{vq}{r}). \qquad (3.23)$$

Les deux premiers termes représentent la valeur de la flexibilité que procure l'opportunité de changer la contribution de chaque technologie à la production totale. Lorsque v tend vers ∞, l'opportunité de changer d'organisation de la production ne vaut plus rien. Les coûts de production avec la *tech I* sont en effet tellement élevés, qu'il est presque improbable qu'un jour v passe au-dessous de c. Nous fixons $K_1 = 0$ pour éliminer le terme $K_1 v^{\beta_1}$ qui tend vers l'infini quand $v \to \infty$. Le troisième terme de la solution représente la valeur de la firme si l'option de réorganiser la production entre les deux unités n'existe pas.

- La solution complète de l'équation (3.22) lorsque $i = 1$ $(v < c)$ est : :

$$W_2(1,1,v) = H_1 v^{\beta_1} + H_2 v^{\beta_2} + (\frac{R_2}{r} - \frac{1}{2}\frac{cq}{r} - \frac{vq}{r}). \qquad (3.24)$$

Cette solution s'interprète de la même façon que la première. La valeur de l'option de réorganiser la production s'annule lorsque v tend vers zéro, nous devons donc éliminer le terme $H_2 v^{\beta_2}$ avec la racine négative (qui tend vers ∞) : $H_2 = 0$.

Les deux intervalles de définition de $W(1,1,v)$ se rencontrent à $v = c$. Le passage d'une région à l'autre doit se faire de façon continue. $W(1,1,v)$ doit être continue et dérivable en tout v, y compris en v^*. Nous égalisons donc les valeurs des solutions $W_1(1,1,v)$ et $W_2(1,1,v)$ et de leurs dérivées en $v = c$, en redéfinissant $K = K_2$ et $H = H_1$:

$$Hc^{\beta_1} = Kc^{\beta_2} \tag{3.25}$$

$$\beta_1 Hc^{(\beta_1 - 1)} - \frac{q}{r} = \beta_2 Kc^{(\beta_2 - 1)} - \frac{1}{2}\frac{q}{r}. \tag{3.26}$$

Ces deux conditions déterminent les deux constantes positives K et H.

$$H = \frac{q}{2r(\beta_1 - \beta_2)} c^{(1-\beta_1)} \tag{3.27}$$

$$K = \frac{q}{2r(\beta_1 - \beta_2)} c^{(1-\beta_2)}. \tag{3.28}$$

Il s'en suit que :

$$W(1,1,v) = \begin{cases} \frac{cq}{2r}\frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)}\left(\frac{v}{c}\right)^{\beta_1} + \frac{R_2}{r} - \frac{1}{2}\frac{cq}{r} - \frac{vq}{r} & si \quad v < v^* = c \\ \\ \frac{cq}{2r}\frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)}\left(\frac{v}{c}\right)^{\beta_2} + \frac{R_2}{r} - \frac{cq}{r} - \frac{1}{2}\frac{vq}{r} & si \quad v > v^* = c \end{cases} \tag{3.29}$$

La valeur finale de la firme diversifiée se compose de la valeur nette de produire avec l'organisation actuelle pour toujours, plus la valeur de l'option de modifier cette organisation si le rapport des coûts change en faveur de la technologie la moins utilisée (voir figure 3.3). Lorsque les réalisations futures du coût v sont plus volatiles, la valeur de la firme diversifiée technologiquement est plus élevée. L'opportunité de pouvoir ajuster la contribution de chaque actif à la production totale, de façon à minimiser le coût variable est valorisée par une plus grande incertitude.

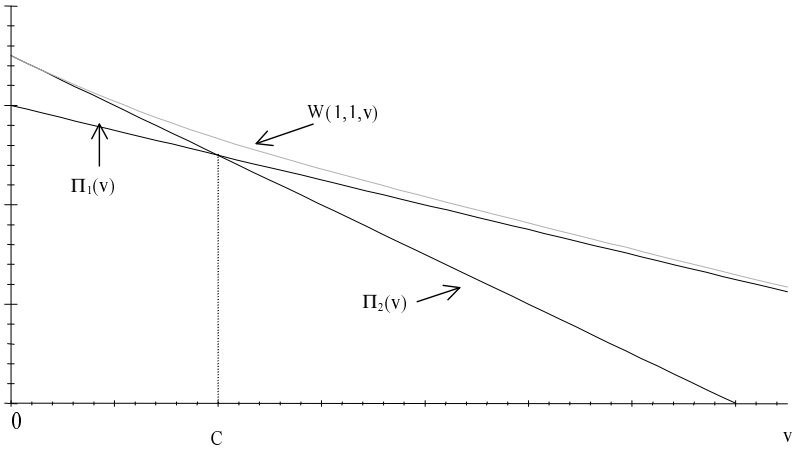


FIG. 3.3 – Valeur de la firme technologiquement diversifiée

La figure 3.4 illustre les fonctions de valeurs finales [10] correspondant aux trois portefeuilles de technologies possibles.

Lorsque l'installation de toute la capacité de la firme est faite par étapes, la composition du portefeuille de technologies final dépend de l'histoire des réalisations de la valeur de l'actif sous-jacent : la technologie incertaine. En effet, l'évolution du coût v détermine, outre la date d'investissement, le choix de la technologie pour chaque unité de production installée. Partant avec trois portefeuilles finaux possibles, la firme les réduit à deux lorsqu'elle procède à son premier investissement et choisit la technologie de son unité de production. Et c'est encore les réalisations du coût qui vont déterminer son choix final.

[10] Voir annexe A

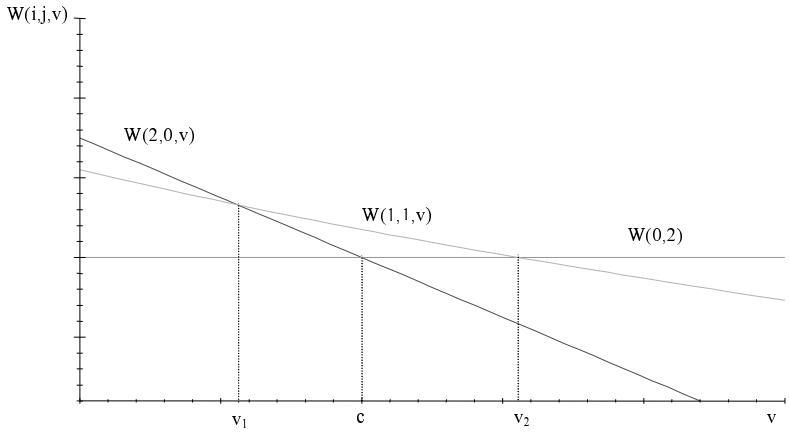


FIG. 3.4 – Valeurs finales possibles du projet d'investissement

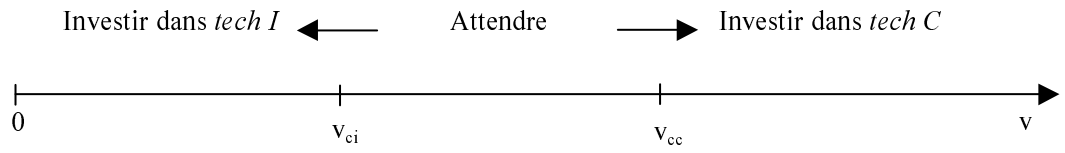
3.4 Valeur de l'option d'investir pour une firme qui possède la technologie certaine

Considérons une firme qui a acquis la technologie certaine lors de son 1^{er} investissement. Elle produit une quantité q à un coût unitaire c et détient une opportunité d'ajouter à sa capacité de production une $2^{ème}$ unité de la même importance, en déboursant un montant initial I. Le choix de la technologie pour ce deuxième investissement détermine la composition de l'actif final de la firme. La firme peut se trouver avec deux unités de la *tech* C et ainsi avec un portefeuille non diversifié de valeur certaine $W(0,2)$ ou bien avec un portefeuille d'actifs diversifiés de valeur $W(1,1,v)$. Nous voulons déterminer la règle optimale d'investissement dans chacune des technologies. On peut montrer que pour chaque type de technologie il existe une valeur de v qui délimite une région où l'attente (la continuation) est optimale (voir annexe B).

La règle de décision se présente donc sous la forme de deux valeurs critiques[11] v_{cc} et

[11] Les indices d'une valeur critique indique dans l'ordre le type de technologie acquise lors du 1^{er} et du

v_{ci} qui représentent respectivement la limite supérieure et la limite inférieure de la région de continuation.



3.4.1 Évaluation de l'option d'expansion

Le problème de la firme qui détient l'option d'expansion et qui maximise sa valeur $F(0,1,v)$ à tout instant t, est le suivant :

$$\begin{aligned} F(0,1,v) &= \max\{\ \max\{W(0,2)-I, W(1,1,v)-I\}\ ; \\ &\qquad (R_1-cq)\Delta t + (1+r\Delta t)^{-1}E\left[F(0,1,\Delta v)\ /v\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dans la région d'attente et sur une intervalle Δt, $F(0,1,v)$ se compose du flux de profit courant et de la valeur espérée actualisée de $F(0,1,v)$ au terme de l'intervalle Δt. Suivant les mêmes étapes décrites auparavant, $F(0,1,v)$ doit respecter l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\sigma^2}{2}v^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - rF + (R_1 - cq) = 0 \tag{3.31}$$

dont la solution complète donne la forme fonctionnelle de la valeur de la firme :

$$F(0,1,v) = F_1 v^{\beta_1} + F_2 v^{\beta_2} + (\frac{R_1}{r} - \frac{cq}{r}), \tag{3.32}$$

$2^{ème}$ investissement.

F_1 et F_2 sont deux constantes positives dont la détermination est présentée ci-dessous. Chacun des deux premiers termes de l'équation (3.32) se rapporte à un choix de technologie. Lorsque le coût v augmente, la valeur de l'opportunité d'installer la *tech I* (terme correspondant à la racine négative) diminue et celle d'acquérir la *tech C* (terme correspondant à la racine positive) augmente ; et vice-versa quand v baisse. L'intervalle d'existence de l'expression donnée par l'équation (3.32) est borné par deux seuils d'investissement inconnus, v_{ci} et v_{cc} ; deux bornes de valeurs finies et positives.

3.4.2 Règle de décision pour l'exercice de l'option de spécialisation

Plus les réalisations du coût v sont élevées, plus l'avantage de l'actif certain se renforce et il existe un seuil v_{cc} au-delà duquel le choix de cet actif s'impose. À v_{cc}, les conditions d'égalité de valeurs et de tangence entre la valeur d'option et la valeur nette du projet doivent être vérifiées ;

$$F(0,1,v_{cc}) = W(0,2) - I$$

$$\frac{R_1}{r} - \frac{cq}{r} + F_1 v_{cc}^{\beta_1} + F_2 v_{cc}^{\beta_2} = \frac{R_2}{r} - \frac{3}{2}\frac{cq}{r} - I \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_{cc}) = 0$$

$$\beta_1 F_1 v_{cc}^{(\beta_1 - 1)} + \beta_2 F_2 v_{cc}^{(\beta_2 - 1)} = 0. \tag{3.34}$$

La condition (3.33) nous dit qu'à la date optimale de l'exercice de l'option d'expansion par l'acquisition de la *tech C,* la valeur présente nette des profits cumulés que l'unité nouvellement installée va générer, doit compenser le coût d'opportunité de cette acquisition : la valeur de l'option perdue. La condition (3.34) implique aussi qu'à cette date, le changement marginal de la valeur d'option suite à une variation du coût v est nul.

3.4.3 Règle de décision pour l'exercice de l'option de diversification

Lorsque le coût v observé favorise la *tech I,* l'exercice de l'option d'expansion par l'installation de l'actif incertain devient optimal dès que les réalisations franchissent un seuil v_{ci}. La fonction de valeur $F(0,1,v)$ doit aussi satisfaire les conditions d'optimisation en ce point d'exercice.

$$F(0,1,v_{ci}) = W(1,1,v_{ci}) - I$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_{ci}) = \frac{\partial W}{\partial v}(1,1,v_{ci}).$$

Le problème à ce niveau est de déterminer de quel côté de c se situe v_{ci} de façon à choisir la forme de $W(1,1,v)$ à utiliser (voir (3.29)). Deux situations peuvent en effet se présenter :

- le seuil v_{ci} qui déclenche l'investissement dans la *tech I* est inférieur à c, c'est à dire que le coût de production espéré[12] est plus avantageux que celui de la technologie certaine.
- le seuil v_{ci} est supérieur à c, ce qui veut dire que le coût de production espéré est moins avantageux que celui de la technologie certaine au moment de l'investissement ; cette possibilité est envisageable si les avantages d'être diversifié sont si élevés qu'ils justifient le choix de la diversification même à une valeur de v où la *tech C* domine.

Aux fins d'illustration, nous considérons le cas où c'est la première situation qui s'applique : $v_{ci} < c$.

Nous montrerons plus bas que ce cas correspond aux situations où il existe un intervalle d'attente à la première étape du processus d'investissement. Comme l'indique (3.29), il y a en l'occurrence utilisation à pleine capacité de l'unité au moment de son installation : $W(1,1,v) = W_2(1,1,v)$. On peut étudier le cas où $v_{ci} \geqslant c$ en posant

[12] Le coût de production v espéré est celui observé, étant donné le processus d'évolution de cette variable.

$W(1,1,v) = W_1(1,1,v)$. En remplaçant les formes fonctionnelles de $F(0,1,v)$ et $W_2(1,1,v)$ nous obtenons les deux équations suivantes :

$$F_1 v_{ci}^{\beta_1} + F_2 v_{ci}^{\beta_2} = H v_{ci}^{\beta_1} + \frac{R_2 - R_1}{r} - (\frac{v_{ci} q}{r} - \frac{1}{2}\frac{cq}{r}) - I \tag{3.35}$$

$$\beta_1 F_1 v_{ci}^{(\beta_1 - 1)} + \beta_2 F_2 v_{ci}^{(\beta_2 - 1)} = \beta_1 H v_{ci}^{(\beta_1 - 1)} - \frac{q}{r}. \tag{3.36}$$

La condition (3.35) égalise la valeur de l'option perdue à la valeur présente espérée, nette du coût d'investissement, associée à la nouvelle unité de production. Cette valeur comprend : la valeur de l'option de changer la répartition de la production totale entre les deux technologie selon l'évolution de v et le revenu additionnel découlant de la mise sur le marché de la nouvelle production $\frac{1}{2}q$ moins le coût de production supplémentaire net de l'économie réalisée $(\frac{1}{2}\frac{cq}{r})$ en faisant passer l'exploitation de l'ancienne unité de production à 50%.

3.4.4 Remarques complémentaires et récapitulation

Les quatre conditions (3.33)-(3.36) déterminent implicitement les constantes F_1 et F_2 de la fonction $F(0,1,v)$ et les bornes supérieure v_{cc} et inférieure v_{ci} de la région de continuation, en fonction des paramètres du modèle : r, σ, I, c, R_1, R_2, q. On peut montrer que F_1 et F_2 sont deux constantes positives et que la fonction $F(0,1,v)$ est décroissante et convexe en v[13].

La comparaison des valeurs de la dérivée première de $F(0,1,v)$ à v_{cc} et à v_{ci} permet de confirmer la position relative de ces deux seuils.

$$\frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_{cc}) = 0$$

[13] Voir annexe C

$$\frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_{ci}) = \beta_1 H v_{ci}^{(\beta_1-1)} - \frac{q}{r}.$$

Remplaçons H par son expression (3.27) :

$$\frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_{ci}) = \left[\frac{\beta_1}{2(\beta_1-\beta_2)}(\frac{v_{ci}}{c})^{(\beta_1-1)} - 1\right]\frac{q}{r}.$$

Sachant que $\beta_1 > 1$, $\beta_2 < 0$ et $v_{ci} < c$, $\frac{\beta_1}{2(\beta_1-\beta_2)}(\frac{v_{ci}}{c})^{(\beta_1-1)} < 1$ et, par conséquent, $\frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_{ci}) < 0$. On a donc $\frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_{ci}) < \frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_{cc})$ et, puisque $\frac{\partial F(0,1,v)}{\partial v}$ est croissante en v ($F(0,1,v)$ convexe), v_{ci} est nécessairement inférieur à v_{cc}.

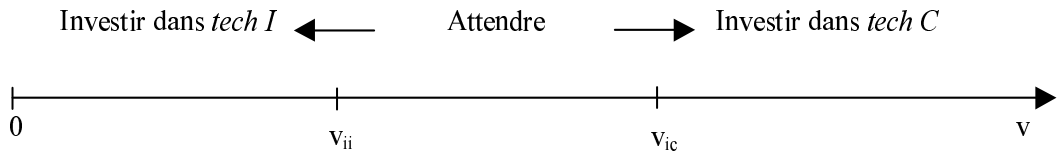
L'écart entre les seuils d'investissement dans la technologie certaine v_{cc} et la technologie incertaine v_{ci}, reflète l'existence d'une plage de valeurs de v pour lesquelles il est optimal, pour la firme qui produit une quantité q avec la *tech C*, de ne pas augmenter sa capacité. C'est une région où les réalisations du coût de production v ne lui permettent pas de choisir entre les deux actifs, sans être suffisamment 'certaine' de ne pas regretter sa décision, du moins dans un avenir proche. Elle peut regretter sa décision dans deux cas : elle se trouve avec un portefeuille de deux actifs certains et privée de profiter d'une baisse du coût v, ou elle possède un portefeuille diversifié et ne peut éviter de subir les hausses de ce même coût. On peut vérifier que la solution a des propriétés qualitatives similaires lorsque $v_{ci} > c$.

Pour récapituler, lorsque la firme possède une unité de la *tech C* la règle optimale d'investissement est :

- développer la capacité à $2q$ avec diversification technologique si $v \leqslant v_{ci}$; la valeur nette de la firme est $W(1,1,v) - I$
- maintenir la capacité à q si $v_{ci} < v < v_{cc}$; la valeur nette de la firme est $F(0,1,v)$
- développer la capacité à $2q$ en gardant la même technologie si $v \geqslant v_{cc}$; la valeur nette de la firme est $W(0,2) - I$.

3.5 Valeur de l'option d'investir pour une firme qui possède la technologie incertaine

Dans cette partie, nous allons déterminer la règle d'investissement de la firme qui se trouve dotée de la *tech I* à l'issue de la $1^{ère}$ étape. La firme produit une quantité q à un coût unitaire stochastique v et détient une option d'agrandir sa capacité de production à $2q$. La valeur du portefeuille d'actifs réels, qu'elle recevra au moment d'investir ($W(1,1,v)$ ou $W(2,0,v)$) sera déterminée par son choix technologique, dicté par l'évolution de la variable d'état v. v_{ic} désigne la valeur critique de v au-dessus de laquelle, la décision d'installer la *tech C* s'impose ; nous notons v_{ii} le seuil qui déclenche l'investissement dans la *tech I*[14]. La règle optimale prend la forme :



3.5.1 Évaluation de l'option d'expansion :

Le problème de la firme qui détient l'option d'expansion et qui maximise sa valeur $F(0,1,v)$ à tout instant t, est le suivant :

$$\begin{aligned} F(1,0,v) &= \max\{\ \max\{W(2,0,v)-I, W(1,1,v)-I\}\ ; \\ &\quad (R_1 - vq)\Delta t + (1+r\Delta t)^{-1} E\left[F(1,0,\Delta v)\right]\}\,. \end{aligned} \tag{3.37}$$

[14] Voir annexe D.

En suivant les mêmes étapes de résolution que dans le premier cas, nous établissons la forme de la fonction $F(1,0,v)$ dans la région d'attente

$$F(1,0,v) = G_1 v^{\beta_1} + G_2 v^{\beta_2} + (\frac{R_1}{r} - \frac{vq}{r}), \tag{3.38}$$

où G_1 et G_2 sont deux constantes à déterminer en même temps que les seuils critiques v_{ic} et v_{ii}.

3.5.2 Règle de décision pour l'exercice de l'option de diversification

La firme décide d'acquérir une seconde unité de production et choisit la *tech C*, si v dépasse le seuil v_{ic} qui satisfait les deux conditions suivantes :

$$F(1,0,v_{ic}) = W(1,1,v_{ic}) - I$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(1,0,v_{ic}) = \frac{\partial W}{\partial v}(1,1,v_{ic}).$$

Comme l'indique (3.29), le choix de la forme fonctionnelle de $W(1,1,v)$ dépend de la valeur relative de v_{ic} par rapport à c :

- si $v_{ic} < c$ la firme achète la *tech C* alors que le coût de production de la *tech I* est inférieur à c ; c'est que l'avantage de la diversification (option de réorganisation) est suffisamment élevé pour justifier l'acquisition d'une technologie qui est dominée au moment de l'acquisition.
- si $v_{ic} \geqslant c$, la nouvelle unité de production est utilisée à 100% de sa capacité dès son acquisition et $W(1,1,v) = W_1(1,1,v)$.

Aux fins de décrire en détail la suite de la résolution du problème, nous considérons ce dernier cas. Pour traiter l'autre alternative, il suffit de poser $W(1,1,v) = W_2(1,1,v)$ dans ce qui suit. Comme on le verra plus bas, ce cas correspond aux situations où il existe

un intervalle d'attente à la première étape du processus d'investissement. Les conditions d'égalité des valeurs et de contact tangentiel sont alors :

$$G_1 v_{ic}^{\beta_1} + G_2 v_{ic}^{\beta_2} + (\frac{R_1}{r} - \frac{v_{ic}q}{r}) = K v_{ic}^{\beta_2} + \frac{R_2}{r} - \frac{cq}{r} - \frac{1}{2}\frac{v_{ic}q}{r} - I \tag{3.39}$$

et

$$\beta_1 G_1 v_{ic}^{(\beta_1 - 1)} + \beta_2 G_2 v_{ic}^{(\beta_2 - 1)} - \frac{q}{r} = \beta_2 K v_{ic}^{(\beta_2 - 1)} - \frac{1}{2}\frac{q}{r}. \tag{3.40}$$

La condition (3.39) a la même interprétation que la condition (3.35).

3.5.3 Règle de décision pour l'exercice de l'option de spécialisation

Lorsque v baisse et passe au dessous de v_{ii}, la décision optimale pour la firme est d'exercer son option d'expansion en installant immédiatement la *tech I*. v_{ii} est donné par les deux conditions suivantes :

$$G_1 v_{ii}^{\beta_1} + G_2 v_{ii}^{\beta_2} + (\frac{R_1}{r} - \frac{v_{ii}q}{r}) = \frac{R_2}{r} - \frac{3}{2}\frac{v_{ii}q}{r} - I \tag{3.41}$$

$$\beta_1 G_1 v_{ii}^{(\beta_1 - 1)} + \beta_2 G_2 v_{ii}^{(\beta_2 - 1)} - \frac{q}{r} = -\frac{3}{2}\frac{q}{r}. \tag{3.42}$$

En convertissant son option d'expansion en une unité de production utilisant la *tech I*, la firme se retrouve avec un portefeuille d'actifs réels non diversifié, dont la valeur future est entièrement déterminée par les réalisations du coût v. Pour des valeurs égales ou inférieures à v_{ii}, la firme estime que le coût observé est suffisamment bas pour que la rentabilité espérée compense le risque que comporte le portefeuille en question.

3.5.4 Remarques complémentaires et récapitulation

Les quatre équations (3.39)-(3.42) complètent la caractérisation de la fonction $F(1, 0, v)$ par la détermination implicite des constantes G_1 et G_2 et des seuils critiques d'investisse-

ment v_{ic} et v_{ii}, en fonction des paramètres du modèle. Dans l'annexe E, nous montrons que G_1 et G_2 sont deux constantes positives et que la fonction $F(1,0,v)$ est décroissante et convexe en v, et que $v_{ii} < v_{ic}$. Des propriétés qualitativement semblables peuvent être établies pour le cas où $v_{ic} < c$.

Comme anticipé, lorsque la firme possède une unité de la *tech I*, il existe donc bien une région d'attente sur l'intervalle $[v_{ii}, v_{ic}]$; v_{ii} inférieur à v_{ic} traduit le fait que la région d'investissement dans la *tech I* correspond aux valeurs faibles du coût v tandis que l'investissement dans la *tech C* se produit à des valeurs élevées de ce coût.

Pour récapituler, lorsque la firme possède une unité de la *tech I* la règle optimale d'investissement est :

- développer la capacité à $2q$ en gardant la même technologie si $v \leqslant v_{ii}$; la valeur nette de la firme est $W(2,0,v) - I$
- maintenir la capacité à q si $v_{ii} < v < v_{ic}$; la valeur nette de la firme est $F(1,0,v)$
- développer la capacité à $2q$ avec diversification technologique si $v \geqslant v_{ic}$; la valeur nette de la firme est $W(1,1,v) - I$.

Cette section termine la résolution du problème d'investissement dans la seconde unité de production. Dans la section suivante nous passons à la première étape d'investissement i.e.. au choix de la date d'entrée sur le marché et de la technologie adoptée pour la première unité de production.

3.6 Décision d'investissement dans la première unité de production

Nous avons caractérisé les règles de décisions lorsque la firme se trouve à l'étape 2 de son plan d'investissement. Nous avons aussi défini la valeur du portefeuille constitué par un actif productif et une option d'expansion, pour chaque issue de l'étape 1. Cette étape marque l'entrée de la firme sur le marché. La valeur d'une firme inopérante est celle de son

portefeuille d'options d'investissement. La gestion de ce portefeuille consiste à décider, à chaque instant t, si l'une de ces options est arrivée à maturité. Ces options peuvent être exercées simultanément ou en séquence stricte, immédiatement ou après une période d'attente. Précisément :

- si, initialement, le coût de production observé est plus petit que v_{ii} ou plus grand que v_{cc}, la firme achète deux unités de production identiques simultanément.
- si, au contraire $v_{ii} \leq v \leq v_{cc}$, la firme a quatre possibilités : attendre, investir dans une unité de la *tech I*, investir dans une unité de la *tech C*, ou investir dans une unité de chaque technologie simultanément.

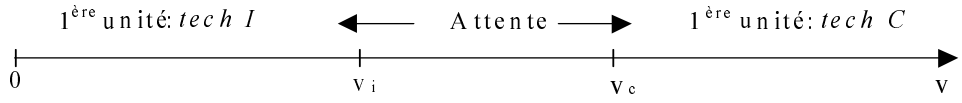
3.6.1 Le cas où $v_{ci} < c$ et $v_{ic} > c$

Aux sections 4 et 5, nous avons traité explicitement les cas où la technologie est choisie lors du deuxième investissement lorsqu'elle domine en terme de coût de production et il est par suite optimal de l'utiliser à pleine capacité au moment de l'acquisition : $v_{ci} < c$ et $v_{ic} > c$. Dans ce cas, il est impossible que la firme fasse l'acquisition en une seule étape d'un portefeuille diversifié. En effet, si la firme ne possède aucune capacité, il faut que v soit supérieur à c pour qu'elle choisisse la *tech C* pour sa première unité ; mais dans ce cas, il faut un temps non nul pour que v puisse descendre jusqu'à v_{ci}. Le même raisonnement s'applique pour un investissement dans la *tech I* suivi d'un investissement dans la *tech C*.

En conséquence, lorsque $v_{ci} < c$ et $v_{ic} > c$, il existe v_i et v_c, tels que la firme, si elle est inactive, investit dans une seule unité de *tech I* si $v_i - \varepsilon \leq v \leq v_i$, attend si $v_i < v < v_c$ et investit dans une seule unité de *tech C* si $v_c \leq v \leq v_c + \varepsilon'$ [15]. Dans ce cas, nécessairement, $v_{ii} < v_i \leq v_c < v_{cc}$. En effet, si $v \leq v_{ii}$, il est optimal d'acquérir deux unités de *tech I* et si $v \geqslant v_{cc}$, il est optimal d'acquérir deux unités de *tech C*. Il se peut aussi qu'il ne soit jamais optimal d'attendre pour acquérir une première unité : $v_i = v_c$.

[15] $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' > 0$.

Nous commençons par supposer qu'il existe une région d'attente $[v_i, v_c]$ [16]. Soit $F(0,0,v)$ la valeur de la firme lorsqu'elle est encore inactive et détient l'option d'investir par étape, dans deux unités de production de capacité q et coûtant I chacune. Si elle existe, la région de continuation (d'attente) est bornée par les deux valeurs qui correspondent aux seuils d'investissement v_i et v_c.



Valeur de la firme inactive

À tout t, le problème de la firme est :

$$\begin{aligned} F(0,0,v) &= \max\{\ \max\{F(0,1,v)-I, F(1,0,v)-I\}\ ; \\ &\qquad (1+r\Delta t)^{-1}E\left[F(0,0,v+\Delta v)\right]\}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Dans la région de continuation, la relation dynamique entre la fonction $F(0,0,v)$ et la valeur de l'actif sous-jacent v est captée par l'équation différentielle partielle (Bellman) :

$$\frac{\sigma^2}{2}v^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - rF = 0, \tag{3.44}$$

dont la solution en $F(0,0,v)$ est de la forme

$$F(0,0,v) = D_1 v^{\beta_1} + D_2 v^{\beta_2} \tag{3.45}$$

et où les coefficients D_1 et D_2 sont à déterminer.

[16] La question d'existence d'un intervalle de valeurs de v pour lesquelles l'attente est optimale est traitée dans l'annexe F.

Règle de décision d'investissement dans l'actif certain

Lorsque la firme acquiert la *tech C* pour sa $1^{ère}$ unité de production, elle reçoit un portefeuille de valeur $F(0,1,v)$. En contrepartie, elle dépense I pour son achat et renonce à son portefeuille courant de valeur $F(0,0,v)$. Au seuil d'investissement v_c :

$$(D_1 v_c^{\beta_1} + D_2 v_c^{\beta_2}) - (F_1 v_c^{\beta_1} + F_2 v_c^{\beta_2}) = (\frac{R_1}{r} - \frac{cq}{r}) - I \tag{3.46}$$

$$\beta_1 D_1 v_c^{(\beta_1 - 1)} + \beta_2 D_2 v_c^{(\beta_2 - 1)} = \beta_1 F_1 v_c^{(\beta_1 - 1)} + \beta_2 F_2 v_c^{(\beta_2 - 1)}. \tag{3.47}$$

Le côté gauche de la condition (3.46), donne la valeur d'option totale de l'opportunité d'investissement de la firme diminuée de la valeur de l'option d'expansion. Ce terme correspond donc à la valeur de l'option d'entrer sur le marché avec une capacité q de la *tech C*, au moment où elle est exercée. Le côté droit donne la valeur présente du flux de profits de produire q à un coût c pour toujours, nette du coût d'installation.

Règle de décision d'investissement dans l'actif incertain

Au seuil v_i la firme exerce son option d'investir à un coût I en contrepartie d'un actif valant $F(1,0,v)$. Cette valeur critique est donnée par les conditions :

$$(D_1 v_i^{\beta_1} + D_2 v_i^{\beta_2}) - (G_1 v_i^{\beta_1} + G_2 v_i^{\beta_2}) = (\frac{R_1}{r} - \frac{v_i q}{r}) - I \tag{3.48}$$

$$\beta_1 D_1 v_i^{(\beta_1 - 1)} + \beta_2 D_2 v_i^{(\beta_2 - 1)} = \beta_1 G_1 v_i^{(\beta_1 - 1)} + \beta_2 G_2 v_i^{(\beta_2 - 1)} - \frac{q}{r} \tag{3.49}$$

Récapitulation

Les seuils critiques v_i et v_c et les constantes D_1 et D_2 de la fonction de valeur sont donnés sous forme implicite en fonction des paramètres du modèle :r, σ, I, c, R_1, R_2, q,

par les conditions (3.46)-(3.49). On peut vérifier que les coefficients D_1 et D_2 sont positifs et que $F(0,0,v)$ est décroissante et convexe en v[17].

La stratégie optimale d'investissement d'une firme inactive qui détient l'opportunité d'investir de façon séquentielle dans deux unités de production, en choisissant pour chaque unité la technologie appropriée, se présente comme suit :

- investir dans 2 unités de la *tech I* si $v \leq v_{ii}$; la valeur nette de la firme est $W(2,0,v) - 2I$
- investir dans 1 unité de la *tech I* si $v_{ii} < v \leq v_i$; la valeur nette de la firme est $F(1,0,v) - I$
- maintenir toutes ses options (attend) si $v_i < v < v_c$; la valeur nette de la firme est $F(0,0,v)$
- investir dans 1 unité de la *tech C* si $v_c \leq v < v_{cc}$; la valeur nette de la firme est $F(0,1,v) - I$
- investit dans 2 unités de la *tech C* si $v \geq v_{cc}$; la valeur nette de la firme est $W(0,2) - 2I$.

3.6.2 Le cas $v_{ci} \geqslant c$ et $v_{ic} \leq c$

Comme on l'a vu lors de l'analyse de l'investissement dans une deuxième unité, si $v_{ci} \geq c$ ($v_{ic} \leq c$), que la firme possède une unité de la *tech C* (*tech I*), alors elle ne fait aucune nouvelle acquisition si v se maintient entre v_{ci} (v_{ic}) et v_{cc} (v_{ii}), et achète une unité de la *Tech I* (*tech C*) si v diminue (augmente) et passe sous le (au-delà du) seuil v_{ci} (v_{ic}) (Voir figure 3.5) Dans ces conditions, il n'existe pas d'intervalle d'attente à l'étape 1. En effet supposons au contraire qu'il existe v_i et v_c, tels que la firme, si elle est inactive, investit dans une seule unité de *tech I* si $v_i - \varepsilon \leq v \leq v_i$, attend si $v_i < v < v_c$ et investit dans une seule unité de *tech C* si $v_c \leq v \leq v_c + \varepsilon'$. On a par construction $v_i < v_{ci}$

[17] Voir annexe G.

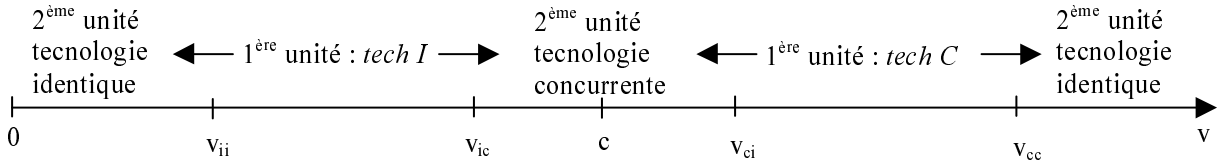


FIG. 3.5 – Décision d'investissement dans le cas où $v_{ic} < c < v_{ci}$

et $v_c > v_{ic}$. Or l'achat de la *tech I*, par exemple, comme deuxième unité i) rapporte moins de revenu que son achat comme première unité et ii) consomme une option de spécialisation alors que son achat comme première unité crée deux options (spécialisation ; diversification). En conséquence, le critère d'investissement doit être moins exigeant pour un premier investissement dans la *tech I* que pour un deuxième investissement, ce qui implique $v_i \geq v_{ci}$, une contradiction. La même argumentation donne $v_c \leq v_{ic}$, également en contradiction avec l'hypothèse de travail.

Nous avons montré que les seuils d'investissement dans une première unité n'existent pas lorsque $v_{ci} \geq c$ et $v_{ic} \leq c$. La stratégie optimale d'investissement d'une firme inactive qui détient l'opportunité d'investir dans deux unités de production, en choisissant pour chaque unité la technologie appropriée, se présente comme suit :

- investir dans 2 unités de la *tech I* si $v \leq v_{ii}$; la valeur nette de la firme est $W(2,0,v) - 2I$
- investir dans 1 unité de la *tech I* si $v_{ii} < v < v_{ic}$; la valeur nette de la firme est $F(1,0,v) - I$
- investir dans une unité de chaque technologie si $v_{ic} \leq v \leq v_{ci}$; la valeur nette de la firme est $W(1,1,v)$
- investir dans 1 unité de la *tech C* si $v_{ci} < v < v_{cc}$; la valeur nette de la firme est $F(0,1,v) - I$
- investir dans 2 unités de la *tech C* si $v \geq v_{cc}$; la valeur nette de la firme est $W(0,2) -$

$2I$.

3.7 Analyse des résultats

D'après les résultats des sections précédentes, nous pouvons établir certains faits et considérer les cas de figures possibles en termes de règles de décision d'investissement.

S'il existe un intervalle de coûts v pour lesquels la firme attend avant d'entrer sur le marché, il est délimité par les seuils critiques v_c et v_i, tel que $v_{ci} \leq v_i < c < v_c \leq v_{ic}$; c étant le seuil d'investissement en certitude. Le premier investissement ne se fait que pour $v \leq v_i$ ou $v \geqslant v_c$.

Pour le deuxième investissement et si un intervalle d'attente existe, la règle de décision est aussi décrite par deux valeurs critiques qui sont telles que : $v_{ci} < v_{cc}$ pour la firme qui possède la *tech C* et $v_{ii} < v_{ic}$ pour celle qui a la *tech I*. Quand la firme est de type $F(0, 1, v)$, les courbes des valeurs de projets à recevoir, en cas d'expansion, se coupent en v_2 (figure 3.4) : un portefeuille d'actifs diversifiés domine à gauche et un portefeuille de deux actifs certains domine à droite de ce point. Le coût v_2 représente un seuil de 'regret' pour la firme qui exerce l'option d'expansion. En effet, si elle s'est diversifiée technologiquement, sa valeur est $W(1, 1, v)$ et si v passe au-dessus de v_2, elle regrette d'avoir installer la *tech I* ; elle aurait été mieux avec un portefeuille certain, de valeur $W(0, 2)$. De même, si elle a choisi la *tech C* pour sa $2^{ème}$ unité de production et v baisse au-dessous de v_2, elle regrette sa décision. En termes de règles de décision ce seuil de 'regret' permet de situer les valeurs v_{cc} et v_{ci} : $v_{ci} < v_2 < v_{cc}$; l'investisseur ne peut prendre une décision dans une région où il la regretterait si elle a été prise auparavant. Pareillement, v_1 (figure 3.4) est le seuil de 'regret' pour la firme de type $F(1, 0, v)$ et v_{ii} et v_{ic} sont tels que : $v_{ii} < v_1 < v_{ic}$. En outre, nous savons que $v_{ii} < v_i < c < v_c < v_{cc}$

Ces résultats peuvent être résumés par les deux cas de figure suivants :

- **Cas I-** un intervalle d'attente avant d'entrer sur le marché existe : $v_{ci} < c < v_{ic}$.

Les courbes des fonctions de valeur $F(1,0,v)$ et $F(0,1,v)$ se coupent nécessairement en une valeur de v, v_3, entre les seuils v_{ci} et v_{ic}. Si l'attente n'existe pas pour le 1^{er} investissement, la fonction de valeur $F(0,0,v)$ se confond avec $F(1,0,v)$ et $F(0,1,v)$ sur les intervalles où celles-ci dominent respectivement. L'investissement est fait par étapes, si $v_{ii} < v < v_{cc}$, et la règle de décision est donnée par la valeur du coût v_3. La $1^{ère}$ unité de production installée immédiatement est la *tech I*, si v observé est au-dessous de ce coût, et la *tech C*, si v observé est au-dessus.

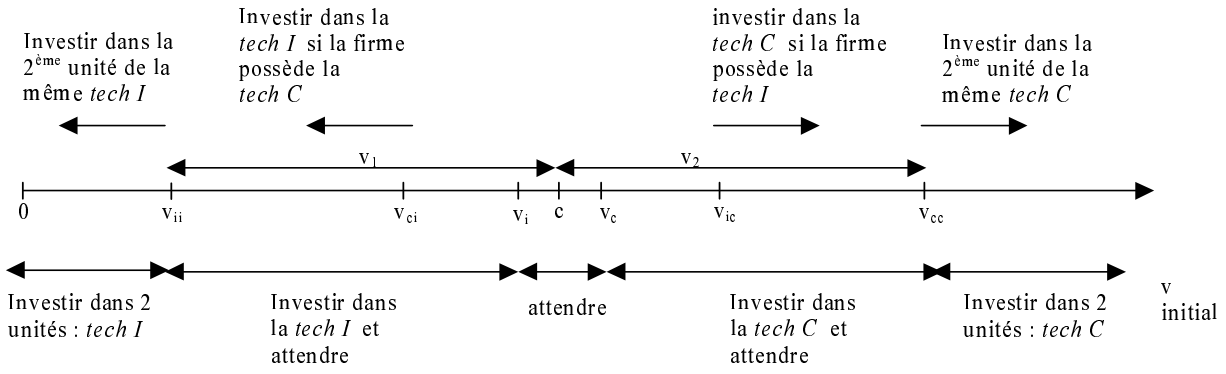


FIG. 3.6 – Cas de figure I

Dans ce cas de figure, l'investissement simultané ne se fait que dans deux unités de production identiques ($v \leq v_{ii}$ ou $v \geqslant v_{cc}$) ; acquérir deux actifs différents (diversification) d'un coup n'est pas envisageable.

Pour comparer les règles de décisions d'investissement dans un actif particulier, pour les deux types de firme $F(1,0,v)$ et $F(0,1,v)$ en phase d'expansion, il faut situer v_{ci} par rapport à v_{ii}, d'une part, et v_{ic} par rapport à v_{cc}, d'autre part. Les résultats en termes de règles de décision et de fonctions de valeur ne nous permettent pas de le faire directement. Néanmoins, l'analyse des caractéristiques de chaque décision selon la composition courante du portefeuille de la firme permet de déterminer les cas de figure possibles et les valeurs

relatives correspondantes pour les seuils critiques.

Considérons d'abord les règles de décision d'expansion par l'acquisition de la *tech I*. La firme de type $F(0,1,v)$, qui produit q à un coût unitaire c, ne peut profiter d'une baisse de v tant qu'elle n'a pas fait son deuxième investissement, ce qui représente un coût d'opportunité supplémentaire de l'attente sur l'intervalle des $v < c$. De plus, l'investissement lui donne droit à une option de réorganisation et donc à une flexibilité des installations de production. Ces deux éléments sont de nature à stimuler la décision. De l'autre côté, la firme de type $F(1,0,v)$ est en mesure de profiter de toute baisse du coût v. En outre, l'exercice de l'option d'expansion la laisse totalement tributaire des réalisations de v, une perspective qui peut atténuer l'attrait de ce projet. Ces remarques impliquent que la première firme, celle pour qui l'investissement constitue une diversification, exige un niveau de v moins favorable à la *tech I* que la firme de type $F(1,0,v)$ pour exercer son option de croissance : $v_{ii} \leq v_{ci}$.

En ce qui concerne les règles d'investissement dans la *tech C*, la firme qui en exploite déjà une unité n'est pas affectée par les hausses des réalisations du coût v et l'exercice de son option d'expansion la prive de tout bénéfice d'une baisse future de ce coût. Par contre, celle qui est dotée d'une unité de la *tech I* est exposée aux mauvaises réalisations. Sur l'intervalle des $v > c$, l'attente a un coût d'opportunité additionnel qui consiste à ne pas pouvoir profiter de la différence de coût entre v et c en exerçant l'option de réorganisation. Il apparaît donc que l'acquisition de la *tech C* se fait à une valeur de v moins favorable à la *tech C* lorsqu'il s'agit d'une diversification des actifs de la firmes : $v_{ic} \leq v_{cc}$.

- **Cas II-** l'entrée sur le marché est immédiate : $v_{ic} < c < v_{ci}$.

Il n'y a d'investissement séquentiel que si $v_{ii} < v < v_{ic}$ ou $v_{ci} < v < v_{cc}$. Dans ce cas les règles de décision sont similaires à celles du cas de figure précédent.

Lorsque $v_{ic} \leq v \leq v_{ci}$, la fonction de valeur $F(0,0,v)$ se confond avec $W(1,1,v)$ et, l'investissement est fait en une seule étape par l'installation simultanée et immédiate de deux unités de production, une de chaque technologie. En effet, pour tout v entre les seuils

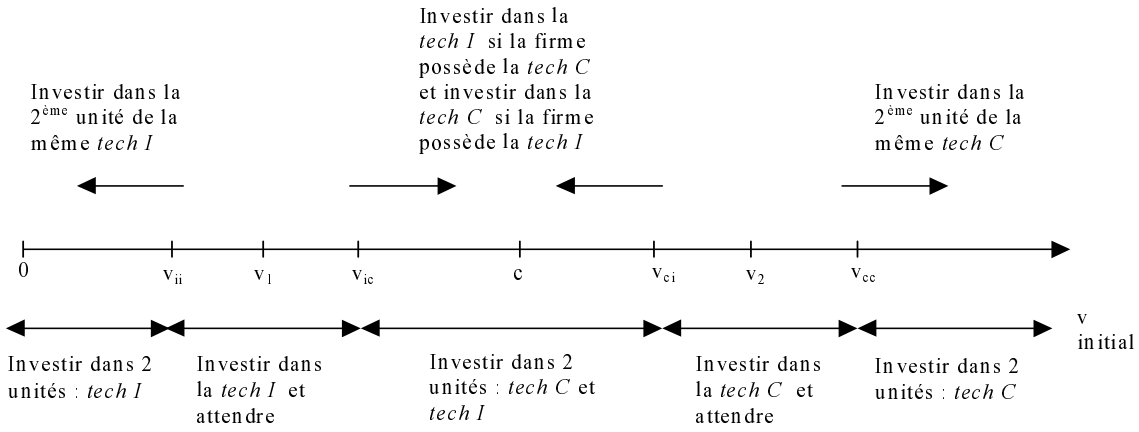


FIG. 3.7 – Cas de figure II

v_{ic} et v_{ci}, la firme a intérêt à exercer l'option d'expansion par l'acquisition de la *tech C* si elle possédait la *tech I* et de la *tech I* si elle avait la *tech C*. Par conséquent, elle n'a pas intérêt à attendre, ni pour entrer sur le marché, ni pour compléter son investissement ; le coût d'opportunité de reporter ces décisions est plus élevé que la valeur d'option.

3.8 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus à partir de la résolution du problème d'investissement par une méthode d'évaluation numérique des valeurs d'option, dont les différentes étapes sont décrites dans l'annexe H.

Le coût direct d'investissement dans une capacité q est $I = 140$. Le prix de vente est fixé à 20 et la capacité d'une unité de production est $q = 1$. Le coût de production d'une quantité q avec la *tech C* est $c = 6$. Produire q avec la *tech I,* occasionne un coût variable v, dont le taux de variation annuel a un écart-type $\sigma = 0.3$. La firme actualise ses flux de profits futurs à un taux annuel $r = 0.04$.

Pour ces valeurs de paramètres, les figures 3.8-3.11 reproduisent les valeurs des porte-

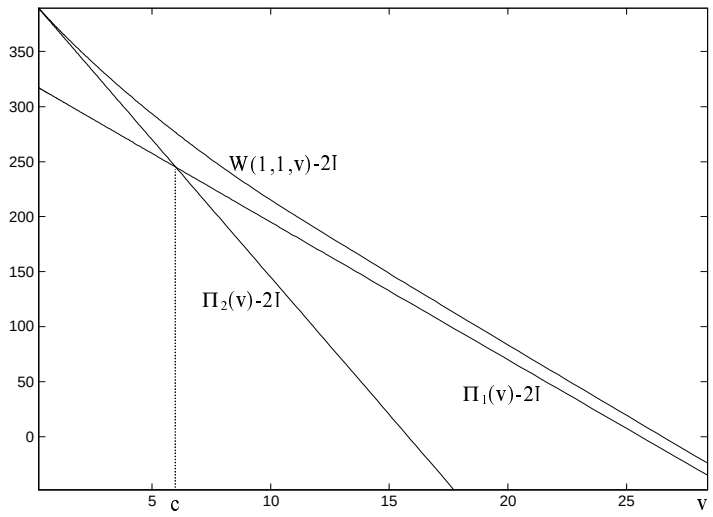


FIG. 3.8 – Valeur de la firme technologiquement diversifiée

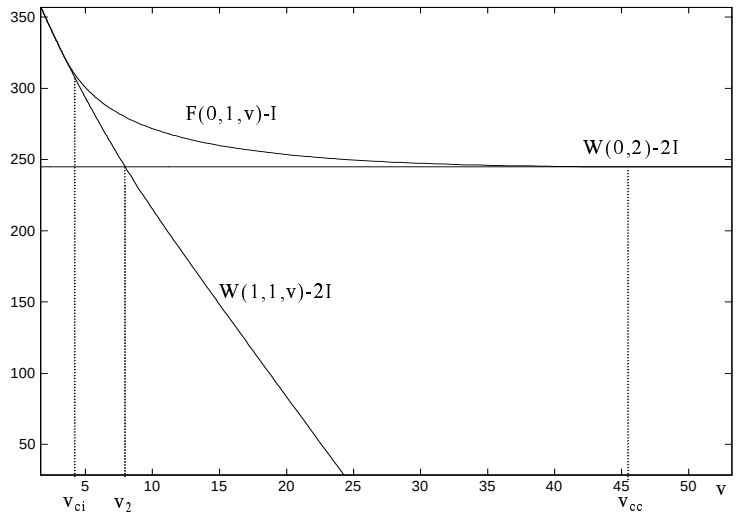


FIG. 3.9 – Investissement dans la $2^{ème}$ unité : firme productive avec *tech C*

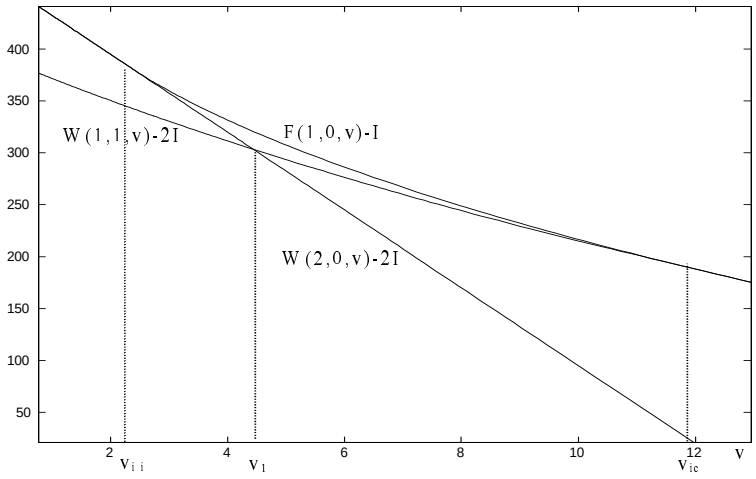


FIG. 3.10 – Investissement dans la $2^{ème}$ unité : firme productive avec *tech I*

feuilles finaux possibles et les règles de décision pour le 1^{er} et le $2^{ème}$ investissement.

On retrouve le premier cas de figure discuté dans la section précédente : $v_{ii} < v_{ci} < c < v_{ic} < v_{cc}$[18].

Lorsqu'on compare les seuils d'investissement dans la même technologie entre la $1^{ère}$ et la $2^{ème}$ unité de production, il en ressort que la décision est prise à un coût v plus élevé quand la firme est inactive : $v_i > v_{ci}$ et $v_i > v_{ii}$ et, $v_c < v_{ic}$ et $v_c < v_{cc}$. Le premier investissement permet à la firme de recevoir des profits immédiats et de prétendre à des bénéfices futurs plus importants, avec l'opportunité de croissance par choix de la technologie.

Pour les règles de décision d'expansion, la diversification stimule l'investissement : $v_{ii} < v_{ci}$ et $v_{ic} < v_{cc}$. La valeur d'une même technologie installée est relativement plus importante par rapport à la valeur d'option, quand le portefeuille final est diversifié que quand il ne l'est pas. La prime de flexibilité associée à la diversification contribue à la compensation de la perte de l'option de reporter le $2^{ème}$ investissement. La détention de

[18] Voir tableau 3.2.

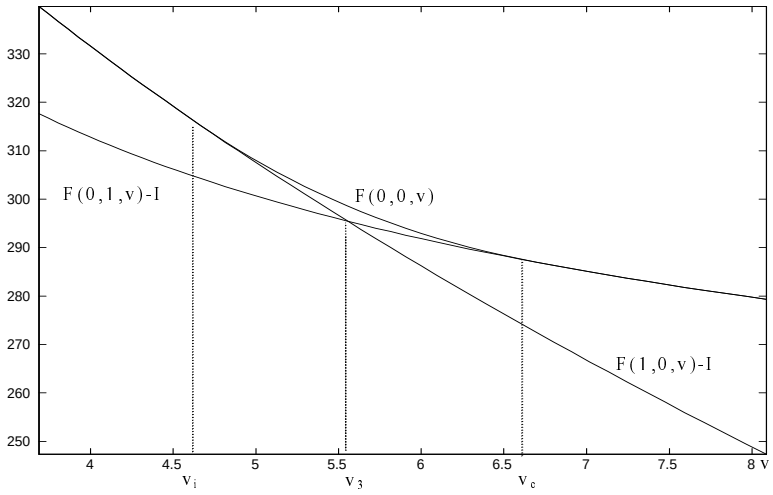


FIG. 3.11 – Investissement dans la $1^{ère}$ unité de production

l'option d'optimiser la gestion de la production, réduit le risque du portefeuille. En effet, elle atténue les conséquences défavorables de l'exposition à l'incertitude, que ce soit le fait de ne pas pouvoir éviter une hausse du coût de production v ou de ne pas pouvoir profiter de sa baisse.

Comme attendu, la disponibilité de l'alternative de produire avec la technologie sans risque augmente le coût d'opportunité de l'investissement dans la *tech I* et entraîne la baisse des valeurs critiques de v qui déclenchent l'acquisition de cette technologie à chaque phase de l'investissement.

Tableau 3.1 : seuils d'investissement dans la *tech I* avec et sans la technologie concurrente

	tech C disponible	*tech C* non disponible
v_i	4.6670	5.2116
v_{ii}	2.3387	3.1848

3.8.1 Impact de l'incertitude

Comme le montre le tableau 3.2, une hausse de l'incertitude renforce les critères d'acquisition de la $1^{ère}$ et de la $2^{ème}$ unité de production, en terme du coût v, et augmente l'attente entre les deux investissements. La valeur d'option des investissements augmente ainsi que celle de réorganisation de la production (voir figure 3.13). Un report de l'investissement dans la *tech C* relativement plus important[19], reflète la prise de valeur de l'opportunité d'avoir l'actif risqué par rapport à celle d'avoir l'actif sans risque ; le coût d'opportunité d'investir dans ce dernier augmente. De plus, l'impact d'une augmentation de l'incertitude sur la décision d'acquisition d'un même actif dépend de la composition courante du portefeuille de la firme. En effet, il est plus grand lorsqu'il s'agit d'une expansion : $\mid \frac{\Delta v_i}{v_i} \mid < \mid \frac{\Delta v_{ci}}{v_{ci}} \mid$, $\mid \frac{\Delta v_i}{v_i} \mid < \mid \frac{\Delta v_{ii}}{v_{ii}} \mid$ et $\frac{\Delta v_c}{v_c} < \frac{\Delta v_{ic}}{v_{ic}}$, $\frac{\Delta v_c}{v_c} < \frac{\Delta v_{cc}}{v_{cc}}$. D'un autre côté, l'effet d'une volatilité plus grande dépend de la composition du portefeuille final. Il est positivement relié au degré du risque induit par la décision d'investissement ou encore négativement relié à la flexibilité qui en résulte : $\mid \frac{\Delta v_{ci}}{v_{ci}} \mid < \mid \frac{\Delta v_{ii}}{v_{ii}} \mid$ et $\frac{\Delta v_{ic}}{v_{ic}} < \frac{\Delta v_{cc}}{v_{cc}}$.

[19] $\mid \frac{\Delta v_{ci}}{v_{ci}} \mid < \frac{\Delta v_{cc}}{v_{cc}}, \mid \frac{\Delta v_{ii}}{v_{ii}} \mid < \frac{\Delta v_{ic}}{v_{ic}}$

Tableau 3.2 : seuils critiques ($c = 6$, $r = 0.04$)

	Volatilité σ		
	0.2	0.3	0.4
v_{cc}	16.0514	45.4862	185.9393
v_2	7.3204	7.9598	8.5650
v_{ci}	4.3372	3.3560	2.6517
v_{ic}	8.5650	11.9733	16.3910
v_1	4.8159	4.3829	4.1161
v_{ii}	3.3736	2.3387	1.6730
v_c	6.1269	6.6971	7.7137
v_i	5.2917	4.6670	4.1161

3.8.2 Impact de la variation du taux d'escompte

Lorsque le taux d'escompte augmente, la valeur de l'opportunité d'investissement diminue (voir figure 3.14). La baisse de la valeur présente du coût d'investissement est accompagnée par la diminution de la valeur présente des projets que la firme reçoit en contrepartie de cette dépense. Les seuils de 'regret' v_1 et v_2 se rapprochent, indiquant que relativement l'option de permutation a moins de valeur en cas de diversification. La baisse des valeurs des projets entraîne la baisse de valeur de l'opportunité d'investissement, l'effet sur l'investissement est ambigû, comme nous pouvons le remarquer pour certains seuils critiques dans tableau 3.3.

Tableau 3.3 : seuils critiques ($\sigma = 0.3$, $c = 6$)

	Taux d'escompte r		
	0.02	0.03	0.04
v_{cc}	38.2705	32.1995	45.4862
v_2	8.7462	8.3438	7.9598
v_{ci}	3.5179	3.6301	3.3560
v_{ic}	10.0739	10.3953	11.9733
v_1	4.0519	4.2474	4.3829
v_{ii}	2.2311	2.4515	2.3387
v_c	6.8031	6.5928	6.6971
v_i	4.3829	4.6670	4.6670

3.8.3 Impact de la variation du coût de production de la technologie certaine

Le tableau 3.4 résume les effets d'une variation du coût de production avec la *tech* C sur les seuils d'investissement. Plus le coût c est petit, plus les seuils d'investissement sont faibles. Il y a un déplacement des seuils critiques dans le sens de variation du seuil d'investissement en certitude $v^* = c$. La valeur de projet que reçoit la firme en installant la *tech* C augmente de sorte que, malgré la croissance de la valeur d'option d'investir dans cet actif, le coût d'opportunité de l'attente augmente (voir figure 3.15). L'avantage que marque l'actif certain par la baisse du coût de production se traduit par des seuils d'investissement dans la *tech* C plus faibles, quelle que soit la composition courante du portefeuille de la firme. L'augmentation de la valeur d'option d'investir dans l'actif sans risque accroît le coût d'opportunité d'investir dans la *tech* I, faisant ainsi différer son acquisition, par des critères d'investissement plus exigeants (v_i, v_{ci} et v_{ii} baissent).

Tableau 3.4 : seuils critiques ($\sigma = 0.3$, $r = 0.04$)

	Coût de production c		
	6	4	1
v_{cc}	45.4862	11.8199	1.4808
v_2	7.9598	5.3066	1.3266
v_{ci}	3.3560	2.9219	1.1700
v_{ic}	11.9733	5.0624	0.8154
v_1	4.3829	2.9219	0.7420
v_{ii}	2.3387	2.0045	0.6969
v_c	6.6971	4.0633	–
v_i	4.6670	3.428	–

On peut remarquer aussi que lorsque c diminue, les intervalles d'attente ($[v_i, v_c]$, $[v_{ci}, v_{cc}]$ et $[v_{ii}, v_{ic}]$) sont réduits pour la décision d'acquisition de la $1^{ère}$ et de la $2^{ème}$ unité et entre les deux investissements[20]. Certains de ces délais disparaissent lorsque le coût c est suffisamment petit. Avec $c = 1$, on retrouve le cas de figure II présenté dans la section précédente : $v_{ii} < v_{ic} < c < v_{ci} < v_{cc}$.

Pour cette valeur de c, la fonction de valeur $F(0, 0, v)$ se confond avec la fonction de valeur dominante (supérieure) sur chaque intervalle de v, ; figure 3.12. La firme entre sur le marché immédiatement avec deux unités de production, une de chaque actif, pour tout v initial compris entre v_{ic} et v_{ci}. Il est coûteux à la firme de rester hors du marché, le coût d'opportunité de l'attente est élevé, si bien que l'option de reporter l'acquisition de sa $1^{ère}$ unité de production est nulle et celle d'investir progressivement disparaît autour de c.

Il n'y a d'attente entre la décision d'entrée et la décision d'expansion que sur les intervalles $[v_{ii}, v_{ic}]$ et $[v_{ci}, v_{cc}]$. Pour toute autre valeur du coût v l'investissement est instantané et simultané dans les deux unités de production. Nous obtenons des règles de décision sem-

[20] Les intervalles $[v_i, v_{ii}]$, $[v_i, v_{ic}]$, $[v_c, v_{ci}]$ et $[v_c, v_{cc}]$ sont plus petits.

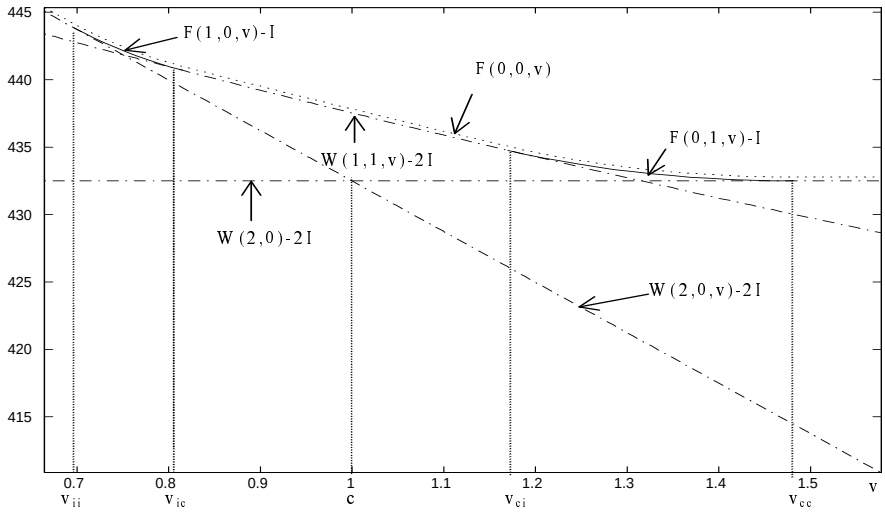


FIG. 3.12 – Décisions d'investissement dans le cas de figure II

blables avec un prix de vente assez élevé pour que le coût d'opportunité de l'attente annule les délais dans l'investissement sur l'intervalle des réalisations de v aux alentours du seuil d'investissement en certitude.

3.9 Conclusion

Nous avons adapter l'approche d'options réelles pour l'étude de la diversification des risques par choix des installations de production. Notre analyse s'articule autour d'un modèle d'investissements réels sans contrainte sur le choix des installations de production. L'entrée sur le marché peut se faire graduellement, avec deux unités productives discrètes ou en une étape. À la fin du processus d'investissement, la capacité de production de la firme peut être du type flexible ou de type non flexible. Les décisions de l'investisseurs sont prises par rapport à la date de l'acquisition de chaque unité et par rapport à la technologie, qui va déterminer la nature stochastique ou certaine des coûts de production.

Les règles de décisions de la firme se présentent comme des stratégies de gestion d'un portefeuille d'options réelles et d'actifs réels. Ces stratégies s'ajustent aux aléas externes pour maximiser la valeur du portefeuille de la firme et reflètent la disposition de cette dernière à exposer sa valeur à l'incertitude. Nous avons montré que l'investissement n'aboutit pas toujours à un portefeuille final diversifié mais la prime de flexibilité reliée à la diversification technologique stimule l'investissement. En outre le portefeuille final dépend en général de l'histoire du processus stochastique qui y mène.

L'évaluation d'un même projet d'investissement dépend de la composition courante du portefeuille détenu par la firme. En effet, le même actif est acquis plus tôt lorsqu'il s'agit d'entrer sur un marché que quand il s'agit d'expansion. Et la décision de développer la capacité par l'installation d'un même actif, est prise plus tôt lorsqu'elle mène à une diversification. Lorsqu'il s'agit de diversifier la technologie de production, la firme demande une prime contre l'incertitude moins élevée. La diversification diminue les risques qui sont associés à une grande exposition comme à la non exposition de la valeur de la firme à l'incertitude. Avec des installations de production diversifiées, elle a une certaine latitude qui lui permet de réagir aux aléas, en profitant d'éventuelles bonnes réalisations de la variable sous-jacente, tout en ayant une certaine protection contre les mauvaises réalisations de cette même variable.

La sélection d'un portefeuille de titres implique un grand nombre de décisions prises à un moment donné qui correspond au début d'un horizon d'investissement. L'investisseur se trouve alors en possession d'un portefeuille dynamique, avec une grande capacité d'adaptation puisqu'il est sujet à révision à tout instant, moyennant certains coûts de transaction. Dans cette étape de révision, le 'timing' peut être un élément important pour l'achat et la vente de titres en prévision des mouvements du marché. Cependant, ceci ne signifie pas qu'il y a des délais dans la constitution d'un portefeuille.

La diversification d'un portefeuille réduit son risque non-systématique, c'est à dire le risque relié aux caractéristiques propres des titres et non à leurs co-mouvements avec le

portefeuille de marché. Plus la corrélation entre les rendements des titres est faible et plus le bénéfice de la diversification est grand.

Dans notre modèle, malgré que les projets ne sont pas indépendants, la corrélation entre les valeurs des actifs est nulle et la diversification procure une flexibilité ou un certain pouvoir d'adaptation sous la forme d'une option de gestion de la production ; un outil qui n'a pas son équivalent dans la gestion de portefeuille de titres, et qui donne un peu de flexibilité et de dynamisme au portefeuille de la firme. Il ne s'agit pas de minimiser la variance du portefeuille de la firme mais plutôt de gérer le risque en minimisant les chances de 'regret' du choix de l'actif ou de la technologie.

Pour notre firme, l'étape de la sélection implique une importante mise de fonds irrécupérables en contrepartie d'un portefeuille d'actifs réels immuable. Cette irréversibilité crée des délais dans l'investissement comme on l'a vu et exclut toute possibilité de révision ultérieure.

Cependant, pour le cas où la rentabilité des projets est assez élevée, la décision d'investissement de la firme est analogue à la sélection d'un portefeuille de titres financiers, du moins pour certaines valeurs du coût. Sans délai, la firme constitue sa capacité de production maximale en diversifiant ses actifs. Évidemment, la flexibilité des portefeuilles reçus n'est pas comparable ; mais ce cas montre qu'en l'absence d'attente le portefeuille diversifié est dominant : le choix optimal est la diversification.

Dans les autres cas, il existe plus de similitude entre la sélection d'un portefeuille de titres et l'étape où la firme détient encore ses options d'investissement, même si cette dernière situation n'implique pas d'engagement réel de fonds. L'étape de gestion dynamique correspondrait alors,dans une certaine mesure, aux choix des dates et des options à exercer. La différence réside dans le fait que chaque fois que la firme décide de convertir une option en un actif réel, elle restreint la flexibilité de son portefeuille.

3.10 Annexes

3.10.1 Annexe A : propriétés des fonctions de valeurs finales

- Courbure de $W(2,0,v)$:

$W(2,0,v) = \frac{R_2}{r} - \frac{3}{2}\frac{vq}{r}$

$\frac{\partial W(2,0,v)}{\partial v} = -\frac{3}{2}\frac{q}{r} < 0$

$W(2,0,v)$ est une fonction linéaire décroissante en v.

- Courbure de $W(1,1,v)$:

  ⋆ Pour les valeurs de $v < c$ (voir (3.29)) :

  $\frac{\partial W(1,1,v)}{\partial v} = \frac{\beta_1 q}{2r(\beta_1-\beta_2)}(\frac{v}{c})^{(\beta_1-1)} - \frac{q}{r}$

  On a :

  $\beta_1 > 1$ et $\beta_2 < 0 \Rightarrow \frac{\beta_1}{(\beta_1-\beta_2)} < 1$

  $v < c \Rightarrow (\frac{v}{c})^{(\beta_1-1)} < 1$

  Ce qui implique que $\left[\frac{\beta_1 q}{2r(\beta_1-\beta_2)}(\frac{v}{c})^{(\beta_1-1)} - \frac{q}{r}\right] < 0$ et par conséquent, que $W(1,1,v)$ est décroissante en v.

  $\frac{\partial^2 W(1,1,v)}{\partial v^2} = \frac{\beta_1(\beta_1-1)q}{2r(\beta_1-\beta_2)}c^{(1-\beta_1)}v^{(\beta_1-2)} > 0 \Rightarrow$ convexité en v sur l'intervalle $[0,c]$.

  ⋆ Pour les valeurs de $v > c$ (voir (3.29)) :

$\frac{\partial W(1,1,v)}{\partial v} = \frac{\beta_2 q}{2r(\beta_1-\beta_2)}(\frac{c}{v})^{(1-\beta_2)} - \frac{1}{2}\frac{q}{r}$

Puisque $\beta_2 < 0 \Rightarrow \left[\frac{\beta_2 q}{2r(\beta_1-\beta_2)}(\frac{c}{v})^{(1-\beta_2)}\right] < 0$ et $W(1,1,v)$ est décroissante en v.

$\frac{\partial^2 W(1,1,v)}{\partial v^2} = \frac{\beta_2(\beta_2-1)q}{2r(\beta_1-\beta_2)}c^{(1-\beta_2)}v^{(\beta_2-2)} > 0 \Rightarrow$ convexité en v sur l'intervalle $[c,\infty]$.

Conclusion : Puisque les deux définitions de la fonction $W(1,1,v)$ se rejoignent au point $v^* = c$ par une égalité de valeur et par tangence, on peut conclure que $W(1,1,v)$ est décroissante et convexe en v sur $[0,\infty]$.

3.10.2 Annexe B : conditions d'existence des valeurs d'arrêt v_{ic} et v_{cc}

L'équation de Bellman :

$F(0,1,v) = \max\{\max\{W(0,2) - I\ ;\ W(1,1,v) - I\}\ ;$

$$(R_1 - cq)dt + (1 + rdt)^{-1} E\left[F(0,1,v')/v\right]\Big\}$$

Soient :

$\Omega(v) = \max\{W(0,2) - I\ ;\ W(1,1,v) - I\}$

$G(v) = F(0,1,v) - \Omega(v)$

$\Phi(v'/v)$: la distribution de probabilités cumulées de v

• $\Omega(v) = W(0,2) - I$

$G(v) = \max\left\{0\ ;\ (R_1 - cq)dt - \Omega(v) + (1 + rdt)^{-1} \int F(0,1,v) d\Phi(v'/v)\right\}$

$$G(v) = \max\Big\{0\ ;\ (R_1 - cq)dt - (1 - \tfrac{1}{1+rdt})\Omega(v) + (1 + rdt)^{-1} \int \left[F(0,1,v) - \Omega(v)\right] d\Phi(v'/v)\Big\}$$

$$G(v) = \max\left\{0\ ;\ (R_1 - cq)dt - \tfrac{rdt}{1+rdt}\Omega(v) + (1 + rdt)^{-1} \int G(v) d\Phi(v'/v)\right\}$$

Pour qu'il existe une région où la continuation est optimale, il faut que le second argument, de l'expression à droite de l'égalité, soit supérieur à 0 pour certaines valeurs de v. Deux conditions sont nécessaires[21] :

1- Une persistance positive de l'incertitude i.e. le processus de v doit avoir la propriété de "dominance stochastique de 1^{er} ordre". Dans ce cas la distribution de probabilités cumulées $\Phi(v'/v)$ des valeurs futures v', se déplace uniformément vers la droite lorsque la valeur courante de v augmente. Le mouvement brownien géométrique satisfait cette condition.

2- L'avantage de continuer (attendre) par rapport à celui d'arrêter (investir) est monotone dans la variable v.

On a :

$\left[(R_1 - cq)dt - \frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v)\right]$ constant en v.

Partant d'une fonction $G(v)$ décroissante, un v plus élevé diminue la valeur espérée de $G(v)$ puisque qu'il hausse les poids de probabilité attachés aux valeurs décroissantes

[21] Voir Dixit et Pindyck chap 4

$G(v')$. On peut donc affirmer que le second argument

$$\left[(R_1 - cq)dt - \frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v) + (1+rdt)^{-1}\int G(v)d\Phi(v'/v)\right]$$

est décroissant en v. Ce qui revient à dire qu'il existe une valeur de v_{cc} à gauche de laquelle ce terme est positif (continuation optimale) et à droite de laquelle il est négatif (arrêt optimal).

Remarque : dire que $G(v)$ est décroissante implique que $F(0,1,v)$ est une fonction décroissante en $v \implies F(0,1,v_{cc}-\varepsilon) > W(0,2) - I$.

- $\Omega(v) = W(1,1,v) - I$

$G(v) = \max\left\{0\ ;\ (R_1 - cq)dt - \frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v) + (1+rdt)^{-1}\int G(v)d\Phi(v'/v)\right\}$

$\Omega(v)$ est décroissante en $v \implies \left[(R_1 - cq)dt - \frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v)\right]$ est croissant en v. Ajoutant à ce fait la propriété de persistance positive de l'incertitude, $G(v)$ doit être croissante. En effet, si on part d'une fonction $G(v)$ croissante sa valeur espérée, $\int G(v)d\Phi(v'/v)$, sera croissante. Le $2^{ème}$ argument à droite est donc croissant, ce qui permet de conclure qu'il existe un valeur v_{ci} telle que la continuation est optimale à droite et l'arrêt (investissement) est optimal à gauche.

Remarque : dire que $G(v)$ est croissante sachant que $W(1,1,v)$ et $F(0,1,v)$ sont deux fonctions décroissantes implique que $F(0,1,v)$ décroît moins rapidement que $W(1,1,v) \implies F(0,1,v_{ci}+\varepsilon) > W(1,1,v_{ci}+\varepsilon) - I$

3.10.3 Annexe C : propriétés de la fonction de valeur $F(0,1,v)$

- Signe des coefficients F_1 et F_2 :

De l'équation (3.34) : $\quad F_1 v_{cc}^{\beta_1} = \frac{-\beta_2}{\beta_1} F_2 v_{cc}^{\beta_2}$

$\beta_1 > 1,\ \beta_2 < 0$ et $v_{cc} > 0 \Rightarrow F_1$ et F_2 sont nécessairement de même signe. Le terme à droite dans (3.33) représente la valeur de l'option d'expansion qui est par hypothèse positive. Ainsi, si F_1 et F_2 sont de même signe, elles sont nécessairement deux constantes positives.

• Courbure de $F(0,1,v)$:

En v_{cc} et en v_{ci}, on a (3.34,3.36) :

$\frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_{cc}) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_{ci}) = \left[\frac{\beta_1}{2(\beta_1-\beta_2)}(\frac{v_{ci}}{c})^{(\beta_1-1)} - 1\right]\frac{q}{r}$

Puisque

$\beta_1 > 1$ et $\beta_2 < 0 \;\Rightarrow\; \frac{\beta_1}{2(\beta_1-\beta_2)} < 1$

et $v_{ci} < c \;\Rightarrow\; (\frac{v_{ci}}{c})^{(\beta_1-1)} < 1$

donc

$\frac{\beta_1}{2(\beta_1-\beta_2)}(\frac{v_{ci}}{c})^{(\beta_1-1)} < 1$

et $\frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_{ci}) = \left[\frac{\beta_1}{2(\beta_1-\beta_2)}(\frac{v_{ci}}{c})^{(\beta_1-1)} - 1\right]\frac{q}{r} < 0$

La dérivée seconde de $F(0,1,v)$ est positive quelque soit $v \geqslant 0$

$\frac{\partial^2 F(0,1,v)}{\partial v^2} = (\beta_1-1)\beta_1 F_1 v^{(\beta_1-2)} + (\beta_2-1)\beta_2 F_2 v^{(\beta_2-2)} > 0$

On peut donc conclure que $\frac{\partial F(0,1,v)}{\partial v}$ est monotone et que sur l'intervalle $[v_{ci}, v_{cc}]$ $\frac{\partial F(0,1,v)}{\partial v} < 0$.

$F(0,1,v)$ est décroissante et convexe en v.

3.10.4 Annexe D : conditions d'existence des valeurs d'arrêt v_{ii} et v_{ci}

L'équation de Bellman :

$$F(1,0,v) = \max\{\max\{W(2,0,v) - I\ ;\ W(1,1,v) - I\}\ ;\ (R_1 - vq)dt + (1+rdt)^{-1}E\left[F(1,0,v')/v\right]\}$$

Soient :

$\Omega(v) = \max\{W(2,0,v) - I\ ;\ W(1,1,v) - I\}$

$G(v) = F(1,0,v) - \Omega(v)$

$\Phi(v'/v)$: la distribution de probabilités cumulées de v.

• $\Omega(v) = W(2,0,v) - I$

$G(v) = \max\left\{0\ ;\ (R_1 - vq)dt - \frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v) + (1+rdt)^{-1}\int G(v)d\Phi(v'/v)\right\}$

$(R_1 - vq) - r\Omega(v) = (R_1 - vq) - r(\frac{R_2}{r} - \frac{3}{2}\frac{vq}{r} - I)$

La dérivée par rapport à v est égale à : $\frac{1}{2}q > 0$.

Le terme $\left[(R_1 - vq)dt - \frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v)\right]$ est croissant en v.

Donc si on part avec une fonction $G(v)$ croissante, sa valeur espérée le sera aussi[22], et on aura $\left[(R_1 - vq)dt - \frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v) + (1+rdt)^{-1}\int G(v)d\Phi(v'/v)\right]$ croissant en v.

Il existe une valeur critique v_{ii} pour laquelle la continuation est optimale à droite et l'arrêt est optimal à gauche.

Remarque : si $G(v)$ est croissante $\Longleftrightarrow$ $F(1,0,v)$ décroît moins rapidement que $W(2,0,v) \Longrightarrow F(1,0,v_{ii}+\varepsilon) > W(2,0,v_{ii}+\varepsilon) - I$.

- $\Omega(v) = W(1,1,v) - I$

  $G(v) = \max\left\{0\ ;\ (R_1 - vq)dt - \frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v) + (1+rdt)^{-1}\int G(v)d\Phi(v'/v)\right\}$

  $\star$ $W(1,1,v) = W_2(1,1,v)$

  $\frac{\partial[R_1 - vq - r\Omega(v)]}{\partial v} = -q - r\beta_1 H v^{\beta_1 - 1} + q$

  $= -q\frac{\beta_1}{2(\beta_1 - \beta_2)}(\frac{c}{v})^{\beta_1 - 1} < 0$

  $\star$ $W(1,1,v) = W_2(1,1,v)$

$\frac{\partial[R_1 - vq - r\Omega(v)]}{\partial v} = -q - r\beta_2 K v^{\beta_2 - 1} + \frac{1}{2}q$

$= -\frac{q}{2}\left[1 - \frac{-\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}(\frac{c}{v})^{1-\beta_2}\right]$

On sait que :

$\left.\begin{array}{l}\beta_2 < 0\\ \beta_1 > 1\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{-\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} < 1$

$v > c \Longrightarrow (\frac{c}{v})^{1-\beta_2} < 1$

$\Rightarrow \left[1 - \frac{-\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}(\frac{c}{v})^{1-\beta_2}\right] > 0$

Donc $\left[(R_1 - vq)dt - \frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v)\right]$ est décroissant en v.

Si $G(v)$ est décroissante en v, alors sa valeur espérée $\left[(1+rdt)^{-1}\int G(v)d\Phi(v'/v)\right]$ est décroissante. Ainsi le $2^{ème}$ argument à droite de $G(v)$ est décroissant en v

Il existe une valeur v_{ic} telle que la continuation est optimale à gauche et l'arrêt (investissement) est optimal à droite.

[22] Propriété de Dominance de 1^{er} Ordre du processus de v.

Remarque : si $G(v)$ est décroissante $\Longleftrightarrow$ $F(1,0,v)$ décroît plus rapidement que $W(1,1,v) \implies F(1,0,v_{ic}-\varepsilon) > W(1,1,v_{ic}-\varepsilon) - I$.

3.10.5 Annexe E : propriétés de la fonction de valeur $F(1,0,v)$

- Signe des coefficients G_1 et G_2

Sachant que $v_{ii} < c$ et avec l'hypothèse $(H-1)$, on peut affirmer que $\frac{R_2-R_1}{r} - \frac{1}{2}\frac{v_{ii}q}{r} - I > 0$. Donc, on doit avoir au moins l'une des constantes G_1 et G_2 de signe positif, dans (3.41). D'après la condition (3.42) :

$G_1 v_{ii}^{\beta_1} = -\frac{1}{2}\frac{q}{\beta_1 r} + \frac{-\beta_2}{\beta_1} G_2 v_{ii}^{\beta_2}$

Supposons que G_1 est positif :

On a $-\frac{1}{2}\frac{q}{\beta_1 r} < 0$, donc $\frac{-\beta_2}{\beta_1} G_2 v_{ii}^{\beta_2} > 0$ nécessairement ; ce qui n'est vrai que si $G_2 > 0$.

Remplaçons $G_1 v_{ii}^{\beta_1}$ dans (3.41) :

$G_2 v_{ii}^{\beta_2} = \frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\left[\frac{R_2-R_1}{r} - \frac{1}{2}\frac{\beta_1-1}{\beta_1}\frac{v_{ii}q}{r} - I\right]$

$\left.\begin{array}{c} v_{ii} < c \\ \frac{\beta_1-1}{\beta_1} < 1 \end{array}\right\} \implies \frac{\beta_1-1}{\beta_1} v_{ii} < c \implies \frac{\beta_1-1}{\beta_1}\frac{v_{ii}q}{r} < \frac{cq}{r}$

D'après $H-1$: $\frac{R_2-R_1}{r} - \frac{1}{2}\frac{cq}{r} - I > 0$

$\implies \frac{R_2-R_1}{r} - \frac{1}{2}\frac{\beta_1-1}{\beta_1}\frac{v_{ii}q}{r} - I > 0$

$\implies G_2 v_{ii}^{\beta_2} > 0.$

(3.41) et (3.42) permettent de prouver uniquement que $G_2 > 0$. Pour trouver le signe de la constante G_1, nous allons utiliser les équations (3.39) et (3.40).

(3.40) $\Rightarrow$ $G_2 v_{ic}^{\beta_2} = K v_{ic}^{\beta_2} + \frac{1}{2}\frac{q}{\beta_2 r} v_{ic} - \frac{\beta_1}{\beta_2} G_1 v_{ic}^{\beta_1}$

Remplaçons $G_2 v_{ic}^{\beta_2}$ dans (3.39) :

$G_1 v_{ic}^{\beta_1} = \frac{-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\left[\frac{R_2-R_1}{r} - \frac{cq}{r} + \frac{1}{2}\frac{\beta_2-1}{\beta_2}\frac{v_{ic}q}{r} - I\right]$

Pour montrer que $G_1 > 0$, il suffit de montrer que $\frac{R_2-R_1}{r} - \frac{cq}{r} + \frac{1}{2}\frac{\beta_2-1}{\beta_2}\frac{v_{ic}q}{r} - I > 0$ $(\frac{-\beta_2}{\beta_1-\beta_2} > 0)$.

Pour utiliser l'hypothèse $H-1$, on doit comparer $\left[\frac{1}{2}\frac{\beta_2-1}{\beta_2}\frac{v_{ic}q}{r} - \frac{cq}{r}\right]$ et $-\frac{1}{2}\frac{cq}{r}$ ou encore

$\frac{1}{2}\frac{\beta_2-1}{\beta_2}\frac{v_{ic}q}{r}$ et $\frac{1}{2}\frac{cq}{r}$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\beta_2-1}{\beta_2}>1\\ v_{ic}>c\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\beta_2-1}{\beta_2}v_{ic}>c \iff \frac{1}{2}\frac{\beta_2-1}{\beta_2}\frac{v_{ic}q}{r}>\frac{1}{2}\frac{cq}{r}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\beta_2-1}{\beta_2}\frac{v_{ic}q}{r}-\frac{cq}{r}>-\frac{1}{2}\frac{cq}{r}$$

$$\left[\frac{R_2-R_1}{r}-\frac{cq}{r}+\frac{1}{2}\frac{\beta_2-1}{\beta_2}\frac{v_{ic}q}{r}-I\right]>\left[\frac{R_2-R_1}{r}-\frac{1}{2}\frac{cq}{r}-I\right]>0$$

On peut conclure que $G_1>0$.

Remarque : pour le cas où $v_{ic}<c$, les équations (3.39) et (3.40) deviennent :

(a) $G_1v_{ic}^{\beta_1}+G_2v_{ic}^{\beta_2}=Hv_{ic}^{\beta_1}+\frac{R_2-R_1}{r}-\frac{1}{2}\frac{cq}{r}-I$

(b) $\beta_1G_1v_{ic}^{(\beta_1-1)}+\beta_2G_2v_{ic}^{(\beta_2-1)}=\beta_1Hv_{ic}^{(\beta_1-1)}$

(b) $\Rightarrow$ $G_2v_{ic}^{\beta_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}Hv_{ic}^{\beta_1}-\frac{\beta_1}{\beta_2}G_1v_{ic}^{\beta_1}$

Remplaçons $G_2v_{ic}^{\beta_2}$ dans (a) :

$G_1v_{ic}^{\beta_1}=\frac{-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\left[\frac{R_2-R_1}{r}-\frac{1}{2}\frac{cq}{r}-I\right]+Hv_{ic}^{\beta_1}>0\Longrightarrow G_1>0$

• Courbure de $F(1,0,v)$:

Aux bornes v_{ii} et v_{ic}, nous avons :

$\frac{\partial F}{\partial v}(1,0,v_{ii})=-\frac{3}{2}\frac{q}{r}<0$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(1,0,v_{ic})=\begin{cases}\beta_1Hv_{ic}^{(\beta_1-1)}-\frac{q}{r}<0 & si \quad v_{ic}\le c\\ \beta_2Kv_{ic}^{(\beta_2-1)}-\frac{1}{2}\frac{q}{r}<0 & si \quad v_{ic}>c\end{cases}$$

La dérivée seconde :

$\frac{\partial^2F(1,0,v)}{\partial v^2}=(\beta_1-1)\beta_1G_1v^{(\beta_1-2)}+(\beta_2-1)\beta_2G_2v^{(\beta_2-2)}$

$\beta_1>1$ et $G_1>0$ $\Longrightarrow$ $(\beta_1-1)\beta_1G_1v^{(\beta_1-2)}>0$

$\beta_2<0$ et $G_2>0$ $\Longrightarrow$ $(\beta_2-1)\beta_2G_2v^{(\beta_2-2)}>0$

donc $\frac{\partial^2F(1,0,v)}{\partial v^2}>0$ et $\frac{\partial F(1,0,v)}{\partial v}$ est monotone.

On peut conclure que, sur l'intervalle $[v_{ii},v_{ic}]$, $F(1,0,v)$ est décroissante et convexe en v.

3.10.6 Annexe F : conditions d'existence des valeurs d'arrêt v_i et v_c

Nous considérons la décision d'investissement dans la première unité de production. L'équation de Bellman pour ce problème est la suivante :

$F(0,0,v) = \max\left\{\max\left\{F(0,1,v) - I\ ;\ F(1,0,v) - I\right\}\ ;\ (1+rdt)^{-1}E\left[F(1,0,v')/v\right]\right\}$

Soient :

$\Omega(v) = \max\left\{F(0,1,v) - I\ ;\ F(1,0,v) - I\right\}$

$G(v) = F(0,0,v) - \Omega(v)$

$\Phi(v'/v)$: la distribution de probabilités cumulées de v

- $\Omega(v) = F(0,1,v) - I$

$G(v) = \max\left\{0\ ;\ -\frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v) + (1+rdt)^{-1}\int G(v)d\Phi(v'/v)\right\}$

Pour qu'il existe une valeur (v_c) de v telle que la continuation est optimale pour $v < v_c$ et l'investissement optimal pour $v \geqslant v_c$, $\left[-\frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v) + (1+rdt)^{-1}\int G(v)d\Phi(v'/v)\right]$ doit être décroissante en v.

Nous savons que $\left[-\frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v)\right]$ est croissante en v puisque $\Omega(v)$ est décroissante. Donc, pour avoir un problème d'arrêt optimal avec une solution comme nous l'avons posé, il faut que la fonction $G(v)$ soit non seulement décroissante en v, mais aussi que la décroissance de la valeur espérée de $G(v)$ domine la croissance de $\left[-\frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v)\right]$. Ce qui revient à supposer que la fonction $F(0,0,v)$ décroît plus rapidement que $F(0,1,v)$, de façon à assurer la décroissance de toute l'expression qui nous intéresse.

Une valeur v_c, qui sépare les régions de continuation et d'arrêt, existe telle que $G(v_c) = 0$ et $G(v_c - \varepsilon) > 0$.

- $\Omega(v) = F(1,0,v) - I$

$G(v) = \max\left\{0\ ;\ -\frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v) + (1+rdt)^{-1}\int G(v)d\Phi(v'/v)\right\}$

Pour qu'il existe une valeur (v_i) de v telle que la continuation est optimale pour $v > v_i$ et l'investissement optimal pour $v \leq v_i$, $\left[-\frac{rdt}{1+rdt}\Omega(v) + (1+rdt)^{-1}\int G(v)d\Phi(v'/v)\right]$ doit être croissante en v. Le 1^{er} terme est croissant en v puisque $\Omega(v)$ est décroissante. Il suffit

que $G(v)$ soit croissante pour que v_i existe.

Remarque : $G(v)$ croissante implique que $F(0,0,v)$ décroît moins rapidement que $F(1,0,v) \implies F(0,0,v_i+\varepsilon) > F(1,0,v_i+\varepsilon) - I$.

Si une région d'attente existe, $F(0,0,v)$ est moins décroissante que $F(1,0,v)$ et plus décroissante que $F(0,1,v)$: $F'(0,0,v) > F'(0,1,v)$ et $F'(0,0,v) < F'(1,0,v)$.

3.10.7 Annexe G : propriétés de la fonction de valeur $F(0,0,v)$

- Signe des coefficients D_1 et D_2 :

Par hypothèse, il est profitable d'investir dans une capacité q de la technologie sans risque :

$(\frac{R_1}{r} - \frac{cq}{r}) - I \geqslant 0$

Nous avons aussi démontré que les constantes F_1 et F_2 sont positives :

$F_1 v_c^{\beta_1} + F_2 v_c^{\beta_2} > 0$

D'après l'équation (3.46), $D_1 v_c^{\beta_1} + D_2 v_c^{\beta_2} > 0$. Ce qui nous amène à avancer qu'au moins l'une des constantes D_1 et D_2 est positive.

La fonction $F(0,1,v)$ est décroissante en v :

$\beta_1 D_1 v_c^{(\beta_1-1)} + \beta_2 D_2 v_c^{(\beta_2-1)} = \beta_1 F_1 v_c^{(\beta_1-1)} + \beta_2 F_2 v_c^{(\beta_2-1)} < 0$

$\beta_1 D_1 v_c^{(\beta_1-1)} = \beta_1 F_1 v_c^{(\beta_1-1)} + \beta_2 F_2 v_c^{(\beta_2-1)} - \beta_2 D_2 v_c^{(\beta_2-1)}$

Sachant que $\beta_1 > 1$ et $\beta_2 < 0$: $D_2 < 0$ implique que $D_1 < 0$ et que la valeur d'option $(D_1 v_c^{\beta_1} + D_2 v_c^{\beta_2}) < 0$. Ceci est en contradiction avec (3.46). La constante D_2 ne peut être que positive.

Supposons que $D_1 < 0$, selon l'équation (3.46) on peut dire que :

$D_2 v_c^{\beta_2} > F_1 v_c^{\beta_1} + F_2 v_c^{\beta_2}$

Multiplions des deux côtés par β_2 (négatif) et divisons par v_c (positif) :

$\beta_2 D_2 v_c^{\beta_2-1} < \beta_2 F_1 v_c^{\beta_1-1} + \beta_2 F_2 v_c^{\beta_2-1}$

$\beta_2 F_1 v_c^{\beta_1-1} < \beta_1 F_1 v_c^{\beta_1-1}$

$\Longrightarrow \beta_2 D_2 v_c^{\beta_2-1} < \beta_2 F_1 v_c^{\beta_1-1} + \beta_2 F_2 v_c^{\beta_2-1} < \beta_1 F_1 v_c^{\beta_1-1} + \beta_2 F_2 v_c^{\beta_2-1}$

Si $D_1 < 0 \Longrightarrow \beta_1 D_1 v_c^{\beta_1-1} + \beta_2 D_2 v_c^{\beta_2-1} < \beta_2 D_2 v_c^{\beta_2-1}$

$\Longrightarrow \beta_1 D_1 v_c^{\beta_1-1} + \beta_2 D_2 v_c^{\beta_2-1} < \beta_1 F_1 v_c^{\beta_1-1} + \beta_2 F_2 v_c^{\beta_2-1}$

Ce qui est en contradiction avec l'équation (3.47). D_1 ne peut être négative : $D_1 > 0$.

• Courbure de $F(0,0,v)$:

D'après (3.47) et (3.49) nous avons :

$\frac{\partial F}{\partial v}(0,0,v_c) = \frac{\partial F}{\partial v}(0,1,v_c) < 0$

$\frac{\partial F}{\partial v}(0,0,v_i) = \frac{\partial F}{\partial v}(1,0,v_i) < 0$

La dérivée seconde de $F(0,0,v)$:

$\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(0,0,v) = \beta_1(\beta_1-1)D_1 v^{\beta_1-2} + \beta_2(\beta_2-1)D_2 v^{\beta_2-2} > 0 \qquad \not\vdash v \geqslant 0$

La dérivée première de $F(0,0,v)$ est monotone, croissante en v. Donc $\frac{\partial F(0,0,v)}{\partial v} < 0$ sur l'intervalle d'existence de la fonction.

$F(0,0,v)$ est décroissante et convexe en v.

3.10.8 Annexe H : description de la méthode de résolution numérique

Approximation du processus du coût

Le processus continu du coût

$$\frac{dv}{v} = \sigma dz$$

est tel qu'un changement Δv est distribué lognormalement et la valeur espérée de v à t ne dépend que de la valeur présente observée v_0

$$E_t[v] = v_0$$

et sa variance est

$$V_t[v] = v_0^2(e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Lorsque l'intervalle de temps considéré pour les changements dans la variable tend vers zéro, la distribution Lognormale est un cas limite du modèle binomial multiplicatif[23]. Nous allons donc utiliser un modèle binomial d'évaluation d'option.

L'unité de temps, une année, est segmentée en un nombre T ($T = 365$) d'intervalles de temps Δt ($\Delta t = \frac{1}{T}$). Le taux d'actualisation μ correspondant à une période de temps Δt est défini comme suit : $\mu = (1 + r\Delta t)^T - 1$.

L'évolution de la valeur du coût v est représentée de façon, qu'à chaque période, v prend uniquement l'une de deux valeurs possibles. La première étape consiste à déterminer les caractéristiques de la loi binomiale que nous allons utiliser pour l'approximation du processus continu de la variable v. Les valeurs des paramètres spécifiques sont choisies de sorte que la distribution discrète corresponde à la distribution continue.

Soit la notation suivante :

p : la probabilité d'une hausse de v.

$(1 - p)$: la probabilité d'une baisse de v.

h : valeur du saut à la hausse de v.

b : valeur du saut à la baisse de v.

Δt : la longueur d'un pas de temps.

h, b et p sont déterminés par l'approche de Cox-Ross-Rubinstein. Trois conditions doivent être respectées : égalité entre les moyennes et les variances des distributions discrète et lognormale et une condition de 'centrage'. Cette dernière exigence suppose que la variable a des mouvements de hausse et de baisse symétriques. L'arbre binomial est par conséquent défini par les trois équations suivantes :

$$ph + (1 - p)b = 1$$

$$p(h^2 - 1) + (1 - p)(b^2 - 1) = e^{\sigma^2 \Delta t} - 1$$

[23] Cox , Ross et Rubinstein (1979).

$$hb = 1$$

Une solution à ces équations est donnée par :

$$h = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$b = \frac{1}{h}$$

$$p = \frac{1-b}{h-b}$$

Nous posons $v_0 = c$ comme valeur initiale ou valeur observée du coût de production. C'est une valeur pour laquelle la firme est indifférente entre les deux technologies, si elle ne tient pas compte de l'incertitude. Nous générons un vecteur v de N valeurs possibles du coût aléatoire, centrées sur v_0 et respectant la loi binomiale que nous venons de définir. Ce vecteur constituera l'intervalle des valeurs de v sur lequel nous allons évaluer les fonctions de valeurs recherchées. Chaque élément de ce vecteur représente un noeud (un instant donné) à partir duquel et au terme d'un temps Δt, la valeur du coût $v(i)$ peut augmenter à $hv(i)$ avec une probabilité p, ou diminuer à $bv(i)$ avec une probabilité $(1-p)$ [24].

Lorsque le projet est achevé, la firme se trouve avec l'un des trois portefeuilles suivants : 2 unités de l'actif certain, 2 unités de l'actif incertain ou 1 unité de chaque actif. La dernière éventualité implique la présence de l'option de permutation de la production entre les deux actifs. Nous devons donc commencer par calculer la valeur de cette option, pour évaluer le portefeuille diversifié.

Calcul de la fonction de valeur de la firme diversifiée

Après avoir calculer la valeur de produire pour les deux possibilités d'organisation de la production (q avec *tech C* et $\frac{1}{2}q$ avec *tech I*, $\frac{1}{2}q$ avec *tech C* et q avec *tech I*) pour

[24] Si un saut à la hausse se réalise, le coût passe de $v(i)$ à $v(i+1)$ et si par contre une baisse est observée, le coût passe de $v(i)$ à $v(i-1)$.

chaque valeur du coût v possible, nous obtenons deux vecteurs $W1$ et $W2$ correspondant respectivement aux deux types d'organisation. Une stratégie optimale de la firme, est de choisir la répartition de la production de façon à maximiser sa valeur, pour chaque v possible. Soit le vecteur W tel que $W(i) = \max\{W1(i)\ ;\ W2(i)\}$. Le minimum que peut faire la firme diversifiée est d'avoir une valeur $V = W$: nous retenons cette limite inférieure comme fonction de départ pour construire la fonction de valeur V et évaluer l'option de permutation. La relation dynamique, qui caractérise la valeur de la fonction V dans le temps, est qu'elle est égale au profit courant plus la valeur escomptée et espérée de V au terme d'un intervalle Δt.

si $v(i) < c$:

$$V(i) = \frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}(R_2 - cq - v(i)\frac{q}{2})\Delta t + \frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}\left[pV(i+1) + (1-p)V(i-1)\right] \quad (3.50)$$

si $v(i) > c$:

$$V(i) = \frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}(R_2 - c\frac{q}{2} - v(i)q)\Delta t + \frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}\left[pV(i+1) + (1-p)V(i-1)\right] \quad (3.51)$$

Nous itérons sur tous les éléments du vecteur (fonction) initial V jusqu'à ce la valeur de V se stabilise et la relation que nous venons de décrire se vérifie. À chaque itération et pour chaque v possible, nous calculons la valeur de l'expression à droite de l'égalité dans (3.50) ou (3.51), selon le cas. Puis elle est comparée à la valeur de $V(i)$, obtenue à l'issue de l'itération précédente ou la valeur initiale $W(i)$ s'il s'agit de la $1^{ère}$ itération. Si [25] $\pi(i)\Delta t + \frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}\left[pV(i+1) + (1-p)V(i-1)\right] > V(i)$, la valeur $V(i)$ est corrigée vers la hausse par la nouvelle valeur calculée, sinon, nous passons à l'élément suivant de V. Lorsque les changements dans les éléments de V sont plus petits que le critère

[25] $\pi(i) = \frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}(R_2 - cq - v(i)\frac{q}{2})$ si $v(i) > c$ et $\pi(i) = \frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}(R_2 - c\frac{q}{2} - v(i)q)$ si $v(i) > c$.

de convergence (0.0001), les itérations s'arrêtent. Nous obtenons la valeur du portefeuille diversifié V qui intègre la valeur de l'option de réorganisation de la production.

Les valeurs de la firme avec deux actifs identiques $W(0,2)$ et $W(2,0,v)$ sont représentées par deux vecteurs $V1$ et $V2$.

Calcul des fonctions de valeur d'option

La $1^{ère}$ étape consiste à calculer la valeur d'option d'expansion, dans chaque sous-problème possible. Les valeurs de continuation $F(0,1,v)$ et $F(1,0,v)$ sont obtenues par une procédure itérative, consistant à construire les vraies fonctions de valeur à partir d'une conjecture de départ, qui n'est autre que la valeur qu'obtient la firme en investissant tout de suite (valeur d'arrêt).

Soit le vecteur $F1$ qui donne la valeur d'option de la firme qui produit q avec une unité de la *tech C*, $F(0,1,v)$ pour chaque valeur possible du coût v. Il y a deux issues pour ce problème : soit l'investisseur opte pour la *tech C* pour sa deuxième unité de production et prend la valeur $V1$, soit qu'il choisit la *tech I* et prend la valeur V[26]. Le vecteur initial $F1^{(1)} = \max\{V1\ ;\ V\}$. Pour chaque élément de ce vecteur, la valeur présente espérée de la continuation sur un intervalle de temps Δt est :

$$\frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}(R_2 - cq)\Delta t + \frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}\left[pF1^{(1)}(i+1) + (1-p)F1^{(1)}(i-1)\right]$$

qui est comparée à $F1^{(1)}(i)$. Si elle est plus grande, nous la substituons dans $F1^{(1)}(i)$ pour obtenir une nouvelle valeur $F1^{(2)}(i)$. À la fin de cette $1^{ère}$ itération, nous avons une nouvelle fonction $F1^{(2)}$ qui est utilisée comme conjecture dans l'itération suivante ; jusqu'à converger vers la vraie fonction.

La même procédure est utilisée pour retrouver le vecteur $F2$ qui donne la valeur d'option $F(1,0,v)$ de la firme qui produit q avec une unité de la *tech I*. Dans ce cas, le vecteur

[26] Ces valeurs sont nettes des coûts directs d'investissement.

initial $F2^{(1)} = \max\{V2\ ;\ V\}$ et la valeur de continuation à la $1^{ère}$ itération et pour chaque élément est :

$$\frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}(R_2 - v(i)q)\Delta t + \frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}\left[pF2^{(1)}(i+1) + (1-p)F2^{(1)}(i-1)\right]$$

Avec les deux fonctions de valeur $F1$ et $F2$, nous avons les stratégies optimales d'investissement pour la $2^{ème}$ séquence de décisions. Les fonctions $F1$ et $F2$ couvrent la valeur de la firme dans les régions de continuation et les régions d'arrêt pour les deux situations possibles à la deuxième étape d'investissement. Pour obtenir les règles de décision, il faut déterminer les seuils critiques v_{cc}, v_{ci}, v_{ii} et v_{ic}. Les seuils v_{cc} et v_{ic} sont les valeurs de v associées aux premiers éléments des segments communs entre les vecteurs $F1$ et $V1$ et $F2$ et V, respectivement. Les seuils v_{ii} et v_{ci} sont les éléments du vecteur v qui correspondent aux derniers éléments des parties communes entre les vecteurs $F2$ et $V2$ et $F1$ et V, respectivement.

Les valeurs espérées de continuation de cette étape sont les valeurs d'arrêt dans le sous-problème relatif à la 1^{ere} décision d'investissement. Nous pouvons alors procéder à l'évaluation de la continuation pour la firme inactive, en partant de la conjecture suivante : $F^{(1)} = \max\{F1 - I;\ F2 - I\}$[27]. Aussitôt que nous avons la vraie fonction $(F(0,0,v))$ donnée par le vecteur F, nous dérivons la stratégie optimale pour la première séquence de l'investissement sous la forme de deux seuils critiques v_c et v_i comme décrit précédemment pour les autres seuils.

Notre démarche respecte le Principe de Bellman qui stipule qu'une stratégie est optimale si, quelle que soit l'action initiale, les choix qui demeurent constituent une stratégie optimale pour le sous-problème, qui débute à l'état résultant des actions initiales. Les stratégies que nous avons déterminées pour l'acquisition de la $2^{ème}$ unité de production dans les deux états qui peuvent résulter de la 1^{ere} décision d'investissement, sont optimales

[27] Les valeurs $F1$ et $F2$ nettes du coût direct d'investissement.

même si la firme n'a pas optimisé en faisant son 1^{er} choix ; soit au niveau du choix de la technologie, soit au niveau de la date d'investissement.

3.10.9 Annexe I : effets des variations de σ, r et c sur les fonctions de valeur

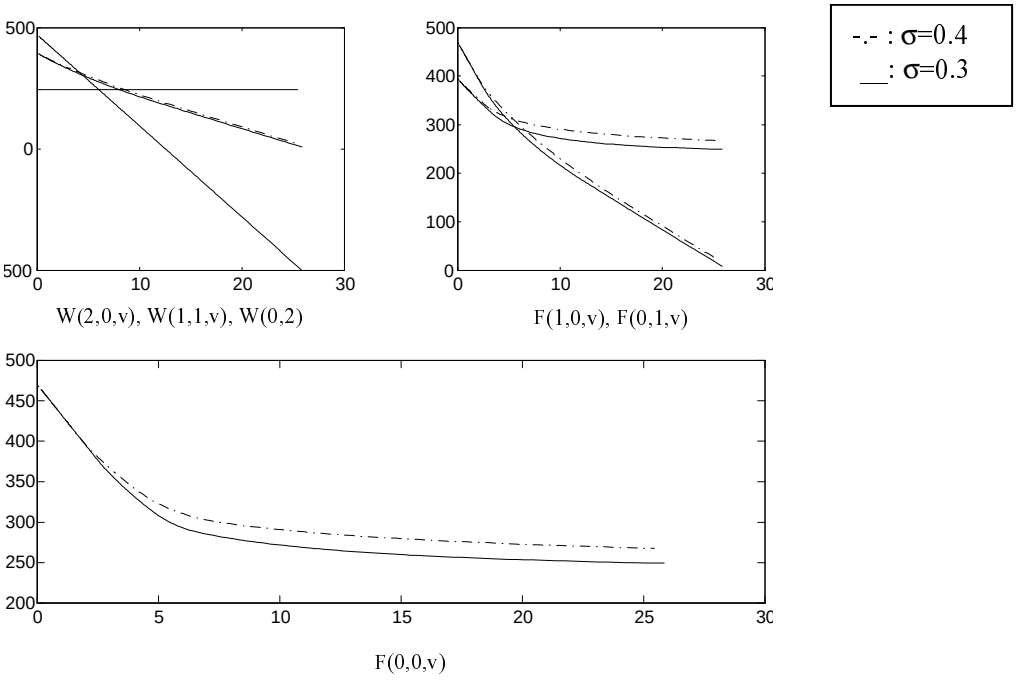


FIG. 3.13 – Effet d'une variation de la volatilité

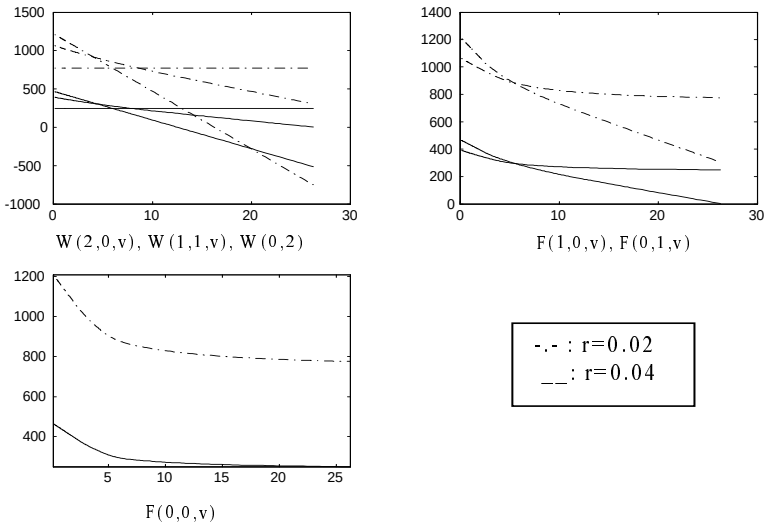


FIG. 3.14 – Effet du taux d'actualisation

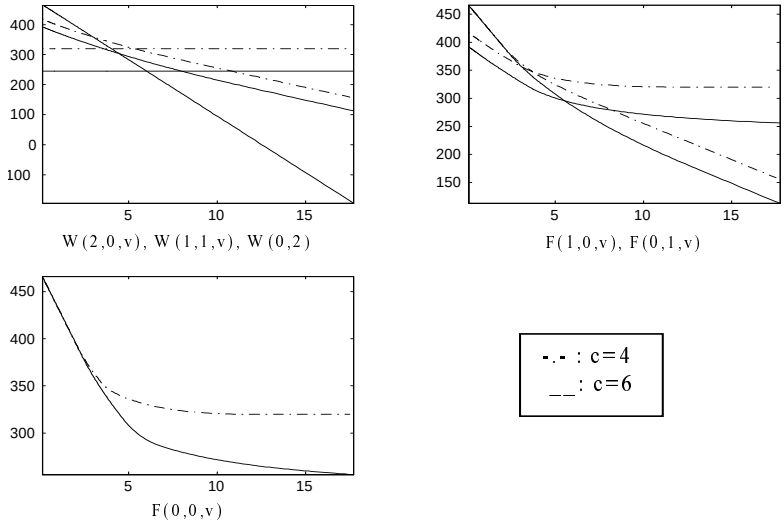


FIG. 3.15 – Effet d'un variation du co ût de production c

Chapitre 4

Préservation des espèces et valeur de la biodiversité : une approche d'options réelles

4.1 Introduction

La biodiversité est définie comme "l'ensemble des patrimoines génétiques des espèces végétales et animales vivant dans un biotope donné, et par extension dans la totalité de la biosphère"[1]. La diversité biologique se rapporte à trois niveaux hiérarchiques : le niveau génétique (gènes), le niveau organismes (espèces et individus) et le niveau écologique (écosystèmes). Les interactions entre ces éléments ou niveaux déterminent l'évolution biologique. En terme d'écosystèmes, la biodiversité procure à la vie humaine les supports physiques et biologiques de base (maintien de la qualité de l'atmosphère et amélioration du climat, régénération et conservation des sols, évacuation des déchets etc.). Les éléments de la biodiversité contribuent aussi à l'activité humaine en tant que ressource ; une res-

[1] Encyclopédie Hachette.

source pour les usages alimentaires, industriels, pharmaceutiques et récréatifs. En outre, avec le progrès de la biotechnologie, l'information génétique véhiculée par ces éléments renferme une valeur actuelle et potentielle énorme.

L'extinction est un phénomène naturel qui fait partie des cycles d'évolution des espèces. Cependant, par l'extension et le développement de l'activité humaine, l'action de l'homme est devenue l'une des causes d'extinction (destruction des habitats naturels, surexploitation des ressources et introduction d'espèces exotiques). La prise de conscience de l'importance de la conservation des ressources de la biodiversité et du rôle joué par l'homme dans leur gestion, a donné naissance à de nombreux travaux et études, écologiques et économiques, autour de la valorisation de la biodiversité, sans laquelle il n'y a pas de possibilités de conservation.

Lorsqu'on parle de la valeur de la biodiversité, on parle de la Valeur Économique Totale[2], un concept utilisé par l'Organisation des Nations Unies dans ses travaux et rapports sur la biodiversité. Elle comprend les valeurs d'usages directs (consommation et production), les valeurs d'usages indirects (maintien de l'équilibre des écosystèmes), la valeur d'existence qui est une valeur intrinsèque des ressources de la biodiversité et finalement la valeur d'option qui est reliée à une utilisation future potentielle de ces ressources.

Plusieurs raisons font de l'évaluation de la biodiversité ou d'un composant de la biodiversité une tâche difficile. Tout d'abord, les connaissances écologiques ne permettent pas de décrire toutes les interdépendances qui existent entres les espèces dans un écosystème et toutes les fonctions et services écologiques de chaque composant de la biodiversité (Norton 1988). Par conséquent, l'évaluation des pertes, en valeur indirecte, qu'entraîne la disparition d'une espèce est un problème qui est loin d'être résolu. En ce qui concerne la valeur d'existence, elle est difficilement mesurable parce qu'elle est inhérente aux préférences

[2] 'The Valuation of Biological Diversity for National Biodiversity Action Plans and Strategies, A Guide for trainers', par Dominic Moran et Camille Bann, mars 2000. Préparé pour United Nations Environment Program UNEP.

des gens, à leur volonté de payer (Moran et Bann 2000). Le calcul de la valeur d'option nécessite au préalable l'identification de l'espèce, l'inférence de ses usages possibles, leur évaluation et l'appréciation de la vraisemblance que de telles découvertes se réalisent à une date future.

L'objectif ultime des travaux portant sur l'évaluation de la biodiversité est d'illustrer les bénéfices associés à sa conservation et ainsi asseoir le besoin ou le désir de conserver la biodiversité sur des bases économiques.

L'analyse des politiques de conservation de la biodiversité et de leur efficacité a été le sujet de plusieurs travaux, dont nous citons Weitzman (1993) et Swanson (1994). Weitzman (1993) s'intéresse au coté pratique d'intégrer la fonction de diversité dans l'analyse des politiques de conservation de la biodiversité. Dans son exemple, la diversité est définie comme la mesure des différences génétiques à l'intérieur d'une même espèce (grue). A partir d'estimations des distances génétiques et des probabilités d'extinction, il calcule la valeur présente espérée de la diversité du groupe d'espèces de grues et dérive la valeur de la diversité marginale. Cette dernière représente le gain relatif actualisé en terme de diversité, d'améliorer les probabilités de survie des différentes espèces de grues. L'auteur montre que la valeur de la diversité marginale dépend plus de la distance génétique de l'espèce par rapport aux autres que du poids de la menace d'extinction qui la frappe. Ainsi, une politique optimale de conservation apporte une amélioration effective à la diversité et non uniquement une amélioration des probabilités de survie. L'analyse n'inclut pas les autres éléments de valeur (valeur d'usage, d'existence...) dans le problème de conservation.

Pour Swanson (1994) les ressources biologiques font partie du portefeuille d'actifs des sociétés humaines. Le processus de développement s'accompagne de désinvestissement dans certains actifs, d'investissement dans d'autres actifs et de conversion d'actifs. Tout déclin d'une espèce résulte d'un processus de désinvestissement, soit par la sur-exploitation, l'exploitation minière ou par l'épuisement de la biodiversité. Le prix du produit de l'espèce ne peut servir d'instrument pour une politique de conservation, que lorsque la valeur relative

de l'espèce et son taux de croissance sont suffisamment élevés.

L'approche des options réelles dans l'évaluation de la biodiversité a été introduite par Fisher et Hanemann (1986). Ils définissent la valeur d'option des éléments de la biodiversité comme le bénéfice présent de conserver la possibilité d'utiliser dans le futur des ressources de la biodiversité que l'on peut dissiper aujourd'hui. Il y a une prime additionnelle à préserver une espèce, une forêt pour des usages futurs, notamment si la valeur future est incertaine et que l'on croit qu'elle peut être élevée et si l'exploitation courante ou la conversion peut être irréversible. Fisher et Hanemann (1986) adoptent l'approche des options réelles dans le cas de l'évaluation d'un projet de développement qui conduit à la conversion irréversible d'un environnement naturel et où les bénéfices que ce développement exclus sont incertains. Ils montrent que quelles que soient les préférences au risque, si les conséquences du développement sont irréversibles, il y a une prime de flexibilité associée au report de ce développement étant donné la perspective de plus d'information plus tard avec la résolution de l'incertitude dans le temps.

Dans un cadre similaire d'option réelle, Wesseler (1999) montre que la décision de l'Union Européenne de reporter le lancement de récoltes génétiquement transformées peut être justifiée d'un point de vue économique. Dans son article, Wesseler considère les risques d'une telle décision au niveau de l'impact sur la biodiversité comme des coûts irréversibles supplémentaires. Cette irréversibilité des coûts, l'incertitude qui les caractérise et l'incertitude sur les bénéfices directs futurs, résultent en une valeur d'option réelle qui favorise le report du lancement des récoltes transgéniques.

La quantification de la valeur de la diversité des espèces à des fins de production a fait l'objet de plusieurs études, principalement sur l'utilisation des espèces pour le développement de produits commerciaux. Ces travaux, qui se sont particulièrement intéressés à la recherche de nouveaux produits pharmaceutiques, mettent en évidence la pertinence économique de cette catégorie de la valeur de l'espèce et donc de la biodiversité. Cependant, il existe des différences importantes entre les estimations de la valeur de production

d'une espèce à travers les différentes études. La valeur de l'espèce est faible lorsqu'elle est calculée sur la base des coûts de prospection de la biodiversité[3]. Par contre, elle est considérablement plus élevée quand elle est basée sur la valeur de marché ou encore sur les bénéfices pour la santé humaine, des produits développés à partir de l'espèce (Fromm (2000)).

Simpson, Sedjo et Reid (1996) mettent l'accent sur le fait qu'il existe d'importantes redondances à l'intérieur des groupes d'espèces prospectées. Ce constat implique des possibilités de substitution des espèces puisqu'il est possible d'obtenir le même composé chimique à partir d'espèces différentes et que des composés chimiques différents, dérivés d'espèces différentes peuvent présenter des caractéristiques similaires relativement à leur utilisation dans le développement des produits pharmaceutiques. Il en découle que la valeur d'une espèce dépend non seulement de la probabilité que la prospection d'une espèce mène au développement d'un produit commercial mais aussi de la probabilité que toutes les autres espèces ne peuvent y contribuer. Ces auteurs arrivent à des évaluations très faibles pour l'espèce marginale et montrent que cette valeur est décroissante relativement au nombre d'espèces disponibles et croissante relativement à la probabilité de succès. Ils concluent que la valeur marginale de la diversité d'espèce est négligeable et par conséquent les motivations de conservation de la biodiversité sont faibles.

Fromm (2000) attribue ce résultat à la grande substituabilité des espèces pour ce genre d'usage qui ne s'intéresse qu'à un segment des caractéristiques de l'espèce. Fromm indique que cette substituabilité est limitée puisque du point de vue écologique chaque espèce possède un vecteur unique de caractéristiques qui est la source d'un vecteur spécifique de fonctions, qui fait que la substitution complète d'une espèce dans le système écologique est presque impossible et qui est à l'origine des relations de complémentarité et d'interdépendance entre les éléments de la biodiversité. Il affirme que la substituabilité des valeurs

[3]La prospection de la biodiversité est la recherche, parmi les organismes existents naturellement, de nouveaux produits de valeur industrielle, agricole et surtout pharmaceutique (Simpson et Sedjo 1996).

de production des espèces découle de la réduction du vecteur de fonctions de l'espèce à quelques fonctions particulières qui peuvent ne pas lui être exclusives. Pour répondre aux travaux sur la prospection de la biodiversité qui trouvent de faibles incitations pour la conservation, Rausser et Small (2000) introduisent le concept de rentes d'information générée par la bioprospection. L'utilisation des connaissances et de l'information disponibles permet de différencier les espèces et d'optimiser le processus de recherche, ce qui incite les chercheurs à payer des frais d'accès. Les rentes d'information dépendent du degré de différenciation des espèces et peuvent être assez importantes pour financer une conservation significative de la biodiversité.

Est-il vrai qu'on n'aura qu'une faible incitation à conserver la diversité biologique si on s'intéresse seulement à sa valeur de production et si on considère les possibilités de substitution des espèces ? Nous considérons l'espèce dans un sens large, pouvant désigner tout élément de la biodiversité et particulièrement les gènes et organismes. La conservation dont il s'agit dans ce présent travail ainsi que dans plusieurs autres des travaux, est motivée uniquement par une utilisation spécifique et restreinte de la capacité de la biodiversité. Pour un utilisateur qui recherche exclusivement la valeur de production d'espèces substituts, la conservation de la diversité peut être génératrice de valeur. La valeur de la biodiversité et l'importance de sa conservation résultent alors de l'incertitude sur la valeur future des espèces, des possibilités de substitution entre espèces en cas d'événements défavorables et enfin de l'irréversibilité de toute perte de diversité.

Par une approche d'options réelles, nous montrons qu'un producteur bénéficie de la conservation d'espèces substituables, même celles qui ne sont pas exploitées ou utilisées dans l'immédiat. L'adoption de l'approche des options réelles nous paraît pleinement justifiée par l'incertitude entourant les décisions de conservation et par l'irréversibilité des pertes de diversité. L'irréversibilité provient de l'impossibilité de restaurer une ressource dégradée à son état originel ou de l'inaccessibilité de cette restauration, lorsqu'elle est envisageable, en termes de coûts ; ces coûts sont généralement plus élevés que ceux nécessaires

à la prévention de la dégradation de la ressource.

L'incertitude est présente à plusieurs niveaux. Les connaissances scientifiques relatives aux différentes relations et interdépendances des espèces sont continuellement en évolution ; l'extinction d'une espèce peut entraîner la disparition d'autres espèces. Et même si nous nous confinons aux fonctions reliées à la production, deux espèces qui sont complètement substituables aujourd'hui dans la conception d'un médicament par exemple, peuvent avoir des avantages inégaux en cas de mutation future du virus à l'origine de la maladie. Il existe bien d'autres sources d'incertitude, comme la méconnaissance de la résistance des espèces face à des changements climatiques ou à l'apparition d'un prédateur ; il y a possibilité d'une extinction naturelle qui peut dépasser notre pouvoir de contrôle ou de protection.

Nous présentons un modèle où la biodiversité est décrite par la coexistence de plusieurs espèces. La conservation des espèces engendre des coûts continuels ; en contrepartie elle génère des bénéfices d'usage immédiats et futurs. La conservation est coûteuse ; elle implique des dépenses explicites ou de renoncer à certaines activités. La suppression de ces dépenses entraîne la disparition irrévocable et immédiate de l'espèce. L'irréversibilité de la décision de ne pas conserver la diversité biologique se traduit donc par la perte définitive de la possibilité ou de l'option d'utiliser l'espèce disparue ultérieurement.

Chaque espèce peut procurer au décideur un bénéfice par un usage particulier. Ce bénéfice est affecté par des chocs aléatoires. Ces chocs résument toute l'incertitude qui entoure la valeur de l'espèce et l'acquisition de nouvelles informations qui peuvent résulter en une prise ou perte de valeur.

La substituabilité des espèces est désignée, par plusieurs auteurs, comme une hypothèse qui a un effet dissuasif sur la conservation de la diversité. Nous pensons que la substituabilité peut être à l'origine de nouvelles options et par suite créatrice de valeur et d'intérêts pour la conservation. Dans ce but, nous envisageons une situation où les différentes espèces sont des substituts dans leur utilisation et répondent à un même besoin pour l'usage

en question. Conséquemment, nous donnons au décideur la possibilité de tirer profit, à tout instant, de celle qui a la valeur d'utilisation la plus élevée. Ainsi, le décideur détient l'option d'utiliser une espèce plutôt qu'une autre s'il peut en retirer plus de bénéfice, sans porter préjudice à ses activités.

En plus de l'option de permutation entre les éléments de la biodiversité dans l'utilisation, le décideur détient l'option de renoncer à la préservation d'une espèce. Cette dernière option sera exercée lorsque le coût d'opportunité de renonciation est compensé par l'économie faite sur toutes les dépenses futures qui auraient été nécessaires pour la conservation. Le coût d'opportunité de laisser disparaître une espèce renferme le coût d'en avoir besoin dans l'avenir et de ne pas pouvoir en disposer.

Pour le cas de deux espèces et avec certaines restrictions sur les fonctions de valeur, nous arrivons à montrer l'existence d'une période d'attente, pendant laquelle le décideur éclairé conserve la biodiversité tant que les valeurs relatives des espèces ne lui permettent pas d'être raisonnablement certain de la dominance de l'une d'elles. Il continue donc à dépenser pour garder la diversité et ses deux options (option de permutation et option de renonciation), alors qu'une seule espèce lui fournirait le même bien-être instantané. Cette attente est motivée par un principe de précaution. La perte de la diversité des espèces étant irréversible, le planificateur social doit se protéger contre un retournement de situation futur, qui l'amènerait à regretter sa décision de faire disparaître l'espèce. Il ne prend donc une décision que lorsque la valeur de l'espèce qu'il va faire disparaître est suffisamment dominée par celle qui va subsister. La résolution numérique d'un modèle plus général confirme ce résultat.

La motivation de conservation n'est donc pas détruite par la substituabilité qui, en réalité, donne à chaque espèce une chance de servir un jour futur pour un usage connu aujourd'hui. Le décideur trouve un intérêt à se réserver le droit de disposer des opportunités que lui offrent la biodiversité. Un intérêt qui se traduit par une valorisation de cette diversité et par un désir de conservation.

Plus d'incertitude augmente la valeur de la biodiversité, ainsi que la valeur de l'espèce marginale qui, comme dans Simpson et Sedjo (1996), est décroissante par rapport au nombre d'espèces.

Dans la prochaine section nous spécifions le modèle général, cadre de l'analyse. Dans les sections 3,4,5 et 6 nous présentons et résolvons analytiquement une version simplifiée du modèle. La section 7 et 8 sont consacrées à l'illustration des résultats et à l'étude de la valeur marginale de la biodiversité. Dans la section 9 nous présentons les résultats de la résolution numérique du modèle plus général et nous réservons la dernière section à la conclusion.

4.2 Un modèle d'évaluation de la biodiversité

Dans cette section nous exposons d'abord un modèle général d'évaluation de la biodiversité dans lequel la valeur des espèces découle de leur valeur de production, où les espèces sont substituables aux fins de production et coûteuses à conserver, et où l'accent est mis sur la décision de conservation.

La société, que ce soit d'un point de vue d'utilisateur ou de producteur, dispose de composants de la biodiversité (espèces), qui sont au nombre de n, pour les besoins d'une activité. Nous pouvons penser à une activité spécifique de production d'un bien ou service qui peut être assurée par les différentes espèces. Ou encore à une activité groupant plusieurs usages reliés aux espèces disponibles, un seul de ces usages étant possible à un moment donné ; il y a substituabilité des espèces à travers celle de leurs usages.

Le passage d'une espèce à l'autre ou d'un usage à un autre n'occasionne pas de coûts supplémentaires pour le décideur. L'usage génère des bénéfices v_{it} instantanés qui dépendent de l'espèce i utilisée. Ces bénéfices sont incertains. L'information relative à l'activité et aux espèces, évolue dans le temps de sorte que la valeur d'usage future d'une espèce ne peut être connue avec certitude. Nous supposons que la valeur v_{it} de l'espèce

i évolue suivant un mouvement Brownien géométrique, avec un taux de croissance qui a une tendance dans le temps α_i constante et une variance $\sigma_i^2 dt$.

$$\frac{dv_i}{v_i} = \alpha_i dt + \sigma_i dz_i$$

où dz_i est l'accroissement d'un processus de Wiener. Les processus de Wiener z_i caractérisant les innovations sur les valeurs des espèces peuvent être corrélés : $E(dz_i dz_j) = \rho_{ij} dt$. Il est réaliste de supposer que les changements dans les valeurs des espèces soient corrélés lorsque certaines sources d'incertitude peuvent être communes ; même marché final pour des espèces substituts dans l'usage ou interaction entre marchés pour le cas d'usages substituts. La constante positive α_i représente une tendance déterministe de la valeur de l'espèce. Elle peut résulter d'une tendance de la demande pour la production reliée à l'espèce.

Pour garder la possibilité d'utiliser une espèce dans le présent ou dans le futur, le décideur doit dépenser des ressources pour la conserver. Laisser disparaître une espèce équivaut à renoncer à son utilisation potentielle future. Nous modélisons les dépenses de conservation par des coûts continus instantanés C_i. La valeur des revenus générés par l'utilisation à perpétuité de l'une des espèces est :

$$E_t \int_t^\infty e^{-r(s-t)} v_{is} ds.$$

Mais le décideur a intérêt à utiliser, à toute date future s, l'espèce i qui génère les bénéfices d'usage les plus élevés. Soit $\overline{v}_t = v_{it} \quad | \quad v_{it \geqslant} v_{jt} \quad \forall\, j \neq i$, si le décideur conserve les n espèces pour toujours, la valeur nette de ses revenus espérés, à t, est donnée par :

$$V(v_{1t}, ..., v_{nt}) = E_t \int_t^\infty e^{-r(s-t)} \overline{v}_s ds - \sum_{k=1}^{n} \int_t^\infty e^{-r(s-t)} C_k ds.$$

À chaque instant, le producteur peut décider de restreindre la diversité du groupe d'espèces, réduisant ainsi ses coûts et faisant disparaître irrévocablement une espèce. Ce

faisant, il restreint l'ensemble de ses actions futures puisqu'il renonce à l'option de pouvoir un jour faire usage de l'espèce disparue et à celle de prendre cette décision plus tard. Il ne s'engagera donc dans une telle décision que si ce coût d'opportunité ou de renonciation est au moins compensé par l'économie réalisée au niveau des coûts de préservation. Ceci rejoint la notion avancée par Swanson (1994) relativement à l'extinction d'espèces suite aux décisions de désinvestissement : un désinvestissement qui découle d'une gestion d'optimisation du portefeuille d'actifs (n espèces) des sociétés humaines (décideur).

Nous nous trouvons avec un modèle d'arrêt optimal en temps continu à n variables d'état stochastiques où n est déterminé par les décisions de conservation passées du décideur. À chaque instant le producteur compare la valeur nette de garder les n espèces tout en exploitant la plus rentable, à sa valeur s'il laisse disparaître une ou plusieurs des $(n-1)$ espèces non utilisées. Une fois qu'une décision est prise, ce processus continue pour les espèces restantes. Nous ignorons l'espèce qui dominerait à un instant t futur, nous devons donc faire l'exercice décrit précédemment pour les n cas possibles ; chaque cas correspond à un état où une espèce i $(i = 1, ..., n)$ domine et $(n-1)$ espèces j $(j \neq i)$ dont la prolongation de la conservation est à décider.

Ce modèle peut être formulé et utilisé indépendamment pour chaque usage qui fait appel à des ressources substituables de la biodiversité.

Il est intéressant de noter que dans le cas symétrique ($\alpha_i = \alpha$ et $\sigma_i = \sigma \not\vdash i$) et lorsque la corrélation entre les réalisations des valeurs des espèces est parfaite ($\rho_{ij} = 1$), le modèle s'assimile au modèle classique d'options réelles (Fisher et Hanemann (1987), Henry (1974)). En effet, le problème se réduit à ne considérer la conservation que de l'espèce qui est initialement la plus rentable, étant donné qu'on n'espère aucun changement au niveau des valeurs relatives observées des espèces disponibles.

Pour mettre en évidence la valeur de la biodiversité et l'intérêt de la conservation, on peut faire abstraction de certains éléments qui contribuent à complexifier le problème. Dans ce qui suit, nous nous proposons de formuler quelques hypothèses simplificatrices

afin de nous concentrer sur les aspects du modèle pertinents à notre problématique et identifier les éléments critiques qui déterminent la valeur de la biodiversité.

4.3 Modèle simplifié

L'objectif de cette section est de montrer, avec un modèle simple, comment évaluer la biodiversité par une approche d'options réelles et comment la substituabilité des espèces dans certaines activités ne supprime pas nécessairement la justification de conserver la biodiversité. La résolution du modèle simplifié dégage des propriétés qualitatives de la règle de décision qui se retrouvent dans le cas du modèle général et qui aident à la compréhension de ce dernier.

Nous allons considérer une biodiversité composée de deux éléments : $n = 2$. Les deux espèces 1 et 2 sont symétriques [4] ; leurs valeurs v_1 et v_2 obéissent au même processus stochastique mais sont sujettes à des chocs indépendants, respectivement dz_1 et dz_2.

$$\frac{dv_i}{v_i} = \alpha dt + \sigma dz_i \tag{4.1}$$

avec $E[dz_1 dz_2] = 0$. Nous supposons que les réalisations des chocs qui affectent la valeur des espèces ne sont pas corrélés ; la probabilité que v_1 augmente, sur un intervalle de temps dt, est indépendante de la probabilité que v_2 augmente ou diminue pendant le même laps de temps.

La dépense nécessaire pour maintenir chacune des espèces est proportionnelle à sa valeur d'usage observée. Plus la valeur de l'espèce est élevée, plus les ressources nécessaires à sa conservation sont importantes. Le coût de la préservation de l'espèce i est une fraction $k < 1$ de la valeur v_i. Le producteur exploite i lorsque $v_{it} > v_{jt}$ $(i, j \in \{1, 2\} \ / \ ij = 2)$, si bien que le revenu net courant est : $v_{it} - kv_{it} - kv_{jt}$. Comme on va le vérifier, cette

[4] La symétrie entre les valeurs des espèces au niveau des paramètres de tendance et de volatilité n'est pas nécessaire, mais simplifie la résolution.

hypothèse sur les coûts de conservation implique l'homogénéité de degré 1 des fonctions de valeur, qui permet de dériver la règle de décision analytiquement.

À tout t et quelle que soit la situation courante, le producteur doit choisir entre continuer son activité en conservant les deux espèces ou continuer sa production et arrêter de financer la préservation de l'espèce qui n'est pas utilisée. En d'autres mots, il a le choix entre attendre en gardant l'option de substituer les espèces à un moment futur, se réservant ainsi l'opportunité d'une utilisation future de l'espèce non exploitée dans l'immédiat, ou laisser disparaître cette dernière en supprimant la dépense de conservation. Notons qu'avec $k < 1$ le décideur conserve toujours au moins une espèce, ce qui n'est pas le cas avec des coûts de conservation constants. Ainsi en l'absence de diversité la valeur présente espérée des profits est :

$$\begin{aligned} V(v_{it}) &= E_t \int_t^\infty e^{-r(s-t)}(1-k)v_{is}ds \\ &= \frac{(1-k)}{r-\alpha}v_{it}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

La fonction de valeur décrivant le problème de décision est la suivante :

$$F(v_{1t}, v_{2t}) = \max_T \left\{ E_t \int_t^T e^{-r(s-t)} \left((1-k)\overline{v}_s - kv_{js}\right) ds + e^{-r(T-t)} F(v_{1T}, v_{2T}) \right\}, \tag{4.3}$$

où T correspond aux dates T_{ji} telles que le rapport $\frac{v_j}{v_i}$ atteint pour la première fois le seuil qui déclenche la décision d'abandon de l'espèce j. Nous décomposons le problème (4.3) en deux sous-problèmes correspondant chacun au sous-espace (v_1, v_2) de dominance de l'une et de l'autre des espèces.

- lorsque $v_{1t} \geqslant v_{2t}$: le décideur exploite l'espèce 1 puisqu'elle est plus rentable et doit prendre la décision qui maximise sa valeur $F_1(v_{1t}, v_{2t})$ quant à continuer ou non à conserver l'espèce 2 inutilisée,

$$F_1(v_{1t}, v_{2t}) = \max_{T_{21}} \left\{ E_t \int_t^{T_{21}} e^{-r(s-t)} \left((1-k)v_{1s} - kv_{2s}\right) ds + e^{-r(T_{21}-t)} F_1(v_{1T_{21}}, v_{2T_{21}}) \right\},$$

sous la contrainte des mouvements de v_{1t} et v_{2t} donnés par (4.1).

- lorsque $v_{2t} \geqslant v_{1t}$: le décideur exploite l'espèce 2 puisqu'elle est plus rentable et doit prendre la décision qui maximise sa valeur $F_2(v_{1t}, v_{2t})$ quant à continuer ou non à conserver l'espèce 1 inutilisée,

$$F_2(v_{1t}, v_{2t}) = \max_{T_{12}} \left\{ E_t \int_t^{T_{12}} e^{-r(s-t)} \left((1-k)v_{2s} - kv_{1s}\right) ds + e^{-r(T_{12}-t)} F_2(v_{1T_{12}}, v_{2T_{12}}) \right\},$$

sous la contrainte des mouvements de v_{1t} et v_{2t} donnés par (4.1).

À tout t, le producteur maximise sa valeur en choisissant l'alternative qui lui donne la valeur la plus élevée ; soit de ne plus financer la conservation de l'espèce qui n'est pas utilisée et se retrouver avec une seule espèce pour assurer son activité, soit décider de continuer (garder le statu quo) et obtenir le revenu courant d'exploitation plus la valeur de l'opportunité d'utiliser l'autre espèce si elle devient plus rentable dans l'avenir et l'opportunité de reporter son extinction à un autre moment futur.

Dans un laps de temps durant lequel l'espèce 1 est la plus rentable et la biodiversité est conservée, nous avons :

$$F_1(v_{1t}, v_{2t}) = \left((1-k)v_{1t} - kv_{2t}\right) dt + e^{-rdt} E\left[F_1(v_{1t} + dv_1, v_{2t} + dv_2) \ / v\right].$$

Après un certain nombre de manipulations de cette équation, on obtient l'équation de Bellman suivante

$$rF_1(v_{1t}, v_{2t})dt = \left((1-k)v_{1t} - kv_{2t}\right) dt + E\left[dF_1\right]. \tag{4.4}$$

Par une expansion de dF par le Lemme d'Ito et l'utilisation de l'équation (4.1), l'équation de Bellman devient :

$$\frac{\sigma^2}{2}v_1^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial v_1^2}+\frac{\sigma^2}{2}v_2^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial v_2^2}+\alpha v_1\frac{\partial F_1}{\partial v_1}+\alpha v_2\frac{\partial F_1}{\partial v_2}-rF_1+((1-k)v_1-kv_2)=0. \qquad (4.5)$$

Cette équation différentielle partielle de second degré capte les relations dynamiques entre les variables v_1 et v_2 et la fonction de valeur du décideur, dans la région de conservation (continuation) du sous-espace considéré. Elle doit donc être satisfaite par $F_1(v_1, v_2)$ à tout $t \leq T_{21}$.

4.4 Résolution de l'équation de Bellman

L'équation de Bellman (4.5) est une équation différentielle partielle de second degré et à deux variables. Elle admet une solution particulière $F_1^p(v_1, v_2)$ et une solution complémentaire $F_1^c(v_1, v_2)$ telles que $F_1(v_1, v_2) = F_1^p(v_1, v_2) + F_1^c(v_1, v_2)$.

Une solution particulière est $F_1^p(v_1, v_2) = (\frac{1-k}{r-\alpha}v_1 - \frac{k}{r-\alpha}v_2)$; homogène de degré 1 en v_1 et v_2. Nous stipulons que $F_1^c(v_1, v_2)$, solution de la partie homogène de l'équation (4.5), est aussi une fonction h.d.1[5] en v_1 et v_2. En effet, si les variables v_1 et v_2 augmentent dans la même proportion, le revenu de production et les coûts de conservation augmentent aussi dans cette même proportion. Donc on peut s'attendre à ce que la décision de l'utilisateur dépende des valeurs relatives ou encore du ratio $\frac{v_1}{v_2}$ et que la valeur d'option soit aussi h.d.1 en v_1 et v_2. Nous posons donc et vérifions plus bas que cette restriction n'amène aucune incohérence :

$$F_1^c(v_1, v_2) = v_2 f_1(v) \qquad avec \quad v = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{\partial F_1^c}{\partial v_1} = \frac{\partial f_1}{\partial v}$$

[5] Homogène de degré 1.

$$\frac{\partial F_1^c}{\partial v_2} = f_1 - v\frac{\partial f_1}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 F_1^c}{\partial v_1^2} = \frac{1}{v_2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 F_1^c}{\partial v_2^2} = \frac{v^2}{v_2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2}.$$

En remplaçant les nouvelles expressions pour F_1^c, $\frac{\partial F_1^c}{\partial v_1}$, $\frac{\partial F_1^c}{\partial v_2}$, $\frac{\partial^2 F_1^c}{\partial v_1^2}$ et $\frac{\partial^2 F_1^c}{\partial v_2^2}$ dans la partie homogène de l'équation (4.5),

$$\frac{\sigma^2}{2}v_{1t}^2\frac{\partial^2 F_1^c}{\partial v_1^2} + \frac{\sigma^2}{2}v_{2t}^2\frac{\partial^2 F_1^c}{\partial v_2^2} + \alpha v_1\frac{\partial F_1^c}{\partial v_1} + \alpha v_2\frac{\partial F_1^c}{\partial v_2} - rF_1^c = 0$$

nous obtenons une nouvelle équation homogène en $f_1(v)$:

$$\sigma^2 v^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2} + (\alpha - r)f_1(v) = 0. \tag{4.6}$$

Cette dernière a une solution standard de la forme : $A_1 v^{\beta_1} + A_2 v^{\beta_2}$, où A_1 et A_1 sont des constantes à déterminer et β_1 et β_2 sont les deux racines respectivement positive et négative de l'équation caractéristique[6].

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{r-\alpha}{\sigma^2}}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{r-\alpha}{\sigma^2}}.$$

La solution complète de l'équation (4.5) est

$$F_1(v_1, v_2) = A_1 v_2 v^{\beta_1} + A_2 v_2 v^{\beta_2} + \frac{1-k}{r-\alpha}v_1 - \frac{k}{r-\alpha}v_2, \tag{4.7}$$

[6]L'équation caractéristique est celle obtenue en remplacant $f(v)$ par sa solution générale Av^β dans (4.6).

$F_1(v_1, v_2)$ est la fonction de valeur lorsque la valeur de l'espèce 1 domine celle de l'espèce 2 et lorsque le producteur désire encore maintenir e_2 en vie[7]. Les deux premiers termes de la fonction de valeur $F_1(v_1, v_2)$ représentent la valeur des deux options détenues par le producteur : l'option de laisser disparaître un jour futur l'espèce non productive et l'option de pouvoir substituer les espèces de sorte à produire avec celle qui rapporte le plus. Les autres termes de $F(v_1, v_2)$ traduisent la valeur présente espérée nette du producteur si celui-ci continue d'exploiter e_1 et de conserver les deux espèces pour toujours.

4.5 Règle de décision

La solution au problème d'arrêt optimal posé plus haut, est une frontière critique $v_2^*(v_1)$ dans l'espace (v_1, v_2) où $v_1 > v_2$, qui délimite la région d'attente (conservation des deux espèces) de celle d'exercice (abandon de e_2). La décision de laisser disparaître l'espèce 2 est optimale pour tout $v_2 \leq v_2^*(v_1)$. Dans la mesure où $F_1(v_1, v_2)$ est h.d.1, la règle de décision ne dépend que du rapport v, si bien que la frontière $v_2^*(v_1)$ est une droite qui part de l'origine et le long de laquelle le rapport $\frac{v_1}{v_2^*}$ est constant.

Sur la frontière critique les conditions d'égalité des valeurs et de tangence suivantes doivent être satisfaites :

$$F_1(v_1, v_2^*) = \frac{1-k}{r-\alpha} v_1 \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial F_1(v_1, v_2^*)}{\partial v_2} = 0. \tag{4.9}$$

La condition (4.8) nous dit que sur la frontière $v_2^*(v_1)$ le décideur est indifférent entre la conservation de la biodiversité et la perte de l'espèce 2. La condition (4.9) égalise les variations marginales de la valeur de continuation et de celle d'arrêt évaluées à v_2^* suite

[7] e_i : espèce i.

à une variation de la valeur de e_2. Ces deux conditions garantissent l'optimisation de la décision d'arrêt et le passage de manière continue entre les deux régions. En intégrant la solution donnée par (4.7), les équations (4.8) et (4.9) se réécrivent comme suit :

$$A_1 v_2^*(\frac{v_1}{v_2^*})^{\beta_1} + A_2 v_2^*(\frac{v_1}{v_2^*})^{\beta_2} - \frac{k}{r-\alpha} v_2^* = 0 \tag{4.10}$$

$$(1-\beta_1) A_1(\frac{v_1}{v_2^*})^{\beta_1} + (1-\beta_2) A_2(\frac{v_1}{v_2^*})^{\beta_2} - \frac{k}{r-\alpha} = 0. \tag{4.11}$$

D'après l'équation (4.10), le producteur ne renonce à l'espèce 2 que lorsque la valeur d'option qu'elle génère par son existence, nette des coûts qu'il faut débourser pour la maintenir en vie, s'annule. Donc une fois que le bénéfice supplémentaire $(A_1 v_2(\frac{v_1}{v_2})^{\beta_1} + A_2 v_2(\frac{v_1}{v_2})^{\beta_2})$ découlant de la diversité des espèces arrive juste à compenser le coût de la conservation de cette diversité $(\frac{k}{r-\alpha} v_2)$, il devient désirable de laisser disparaître la seconde espèce et par le même coup perdre la biodiversité. Pour garder une espèce il faut que sa contribution à la valeur totale à travers la valeur d'option qui lui est associée soit supérieure à son coût de conservation.

Connaissant la forme de la solution $v_2^*(v_1)$, nous posons $V_2 = \frac{v_1}{v_2^*} > 1$ l'inverse de la pente de la droite $v_2^*(v_1)$ et nous réécrivons (4.10) et (4.11) :

$$A_1 V_2^{\beta_1} + A_2 V_2^{\beta_2} - \frac{k}{r-\alpha} = 0 \tag{4.12}$$

$$(1-\beta_1) A_1 V_2^{\beta_1} + (1-\beta_2) A_2 V_2^{\beta_2} - \frac{k}{r-\alpha} = 0. \tag{4.13}$$

4.6 Le passage de la dominance d'une espèce à l'autre

Puisque les espèces sont symétriques, nous aurons le même problème dans le sous-espace (v_1, v_2) où l'espèce e_2 est plus rentable $(v_2 > v_1)$. Gardant la même définition de

$v = \frac{v_1}{v_2}$, la valeur de conservation de la biodiversité est

$$F_2(v_1, v_2) = B_1 v_2 v^{\beta_1} + B_2 v_2 v^{\beta_2} + \frac{1-k}{r-\alpha} v_2 - \frac{k}{r-\alpha} v_1. \tag{4.14}$$

Dans cette région, la décision de laisser disparaître l'espèce e_1 est caractérisée par une frontière critique $v_1^*(v_2)$ partant de l'origine et ayant une pente constante $V_1 = \frac{v_1^*}{v_2} < 1$. Pour tout $v_1 \leq v_1^*(v_2)$ ou encore pour tout $\frac{v_1}{v_2} \leq V_1$, il est optimal de cesser de conserver e_1. Les mêmes conditions d'arrêt que (4.8) et (4.9), nous mènent aux deux équations suivantes :

$$B_1 V_1^{\beta_1} + B_2 V_1^{\beta_2} - \frac{k}{r-\alpha} V_1 = 0 \tag{4.15}$$

$$\beta_1 B_1 V_1^{\beta_1} + \beta_2 B_2 V_1^{\beta_2} - \frac{k}{r-\alpha} V_1 = 0. \tag{4.16}$$

Dans notre démarche, nous avons scindé le problème d'évaluation de l'option en deux problèmes selon l'espèce dominante. Sachant qu'à tout moment la situation peut être renversée, dans le sens que l'espèce dominante peut devenir la moins rentable. Si les réalisations de v_1 et v_2 font de sorte que la frontière $v_{1t} = v_{2t}$ est franchie d'un côté à l'autre, la valeur du producteur passe de $F_1(v_1, v_2)$ à $F_2(v_1, v_2)$ ou l'inverse suivant la situation qui primait. Ce passage entre les deux fonctions de valeur implique que sur la frontière $v_1 = v_2$ il y a égalité et tangence entre $F_1(v_1, v_2)$ et $F_2(v_1, v_2)$; la transition se fait de façon continue et optimale. Nous pouvons donc ajouter deux conditions supplémentaires au système d'équations (4.12), (4.13), (4.15) et (4.16), qui seront vérifiées par $F_1(v_1, v_2)$ et $F_2(v_1, v_2)$ à $v_1 = v_2$ ou encore à $v = 1$. Posons :

$$F_1(v_1, v_2) = v_2 G_1(v)$$

$$F_2(v_1, v_2) = v_2 G_2(v)$$

avec

$$G_1(v) = A_1 v^{\beta_1} + A_2 v^{\beta_2} + \frac{1-k}{r-\alpha} v - \frac{k}{r-\alpha}$$

$$G_2(v) = B_1 v^{\beta_1} + B_2 v^{\beta_2} + \frac{1-k}{r-\alpha} - \frac{k}{r-\alpha} v,$$

égalité de valeur et tangence à $v = 1$:

$$G_1(v) = G_2(v) \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial G_1(v)}{\partial v} = \frac{\partial G_2(v)}{\partial v}. \tag{4.18}$$

Les équations (4.17) et (4.18) donnent :

$$A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \tag{4.19}$$

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \frac{1}{r-\alpha} = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2. \tag{4.20}$$

Ces deux dernières conditions établissent les relations entre les constantes A_1, A_2, B_1, B_2, que nous introduisons dans les équations (4.12), (4.13), (4.15) et (4.16), pour enfin aboutir aux deux équations suivantes où les seules inconnues sont les rapports V_1 et V_2,

$$\beta_1 V_2^{(-\beta_2)} = (\beta_1 - 1) V_1^{(1-\beta_2)} + \frac{1}{k} \tag{4.21}$$

$$-\beta_2 V_2^{(-\beta_1)} = (1 - \beta_2) V_1^{(1-\beta_1)} - \frac{1}{k}. \tag{4.22}$$

Rappelons que $V_1 = \frac{v_1^*}{v_2}$ mesure la pente de la frontière linéaire $v_1^*(v_2)$ et que $V_2 = \frac{v_1}{v_2^*}$ mesure la pente de la droite correspondant à la réciproque de $v_2^*(v_1)$. Les deux espèces étant symétriques, nous devons avoir $V_1 = V_2^{-1}$.

4.7 Illustration et récapitulation

La solution est entièrement décrite par les équations (4.12), (4.13), (4.15), (4.16), (4.19) et (4.20). Les constantes V_1 et V_2, pentes respectives des frontières critiques $v_1^*(v_2)$ et $v_2^{*-1}(v_1)$ sont définies de façon implicite par les équations (4.21) et (4.22). Pour illustrer la solution, nous fixons des valeurs pour les paramètres du modèle. Un taux d'actualisation $r = 0.08$, une dépense de conservation représentant $k = \frac{1}{4}$ de la valeur courante de l'espèce, un taux de croissance déterministe $\alpha = 0.04$ pour la valeur de l'espèce et une volatilité de $\sigma^2 = 0.02$. Les valeurs choisies pour les paramètres sont arbitraires, néanmoins elles nous permettent d'analyser qualitativement la décision de conservation de la biodiversité et ses déterminants dans le contexte de notre modèle.

Nous reproduisons ci-après les solutions sur la figure 4.1, où $v_1^*(v_2)$ et $v_2^*(v_1)$ sont représentées sur le même repère (v_1, v_2).

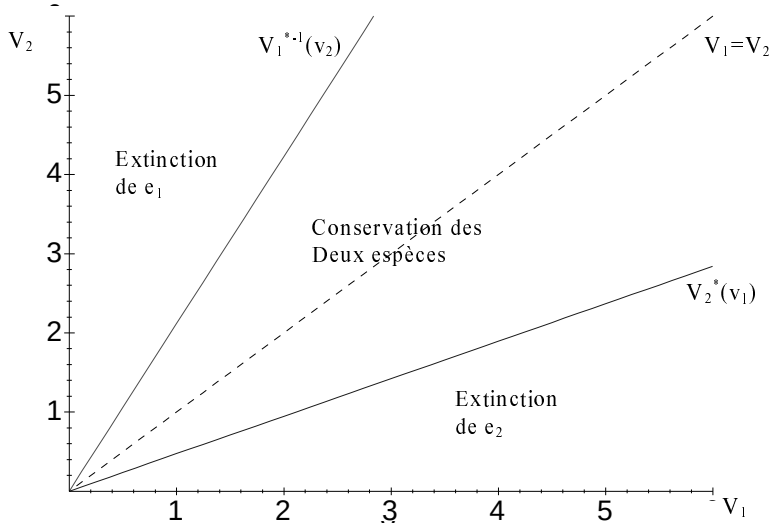


FIG. 4.1 – Décision de conservation : frontières critiques

Dans la région où l'espèce 1 est plus rentable et donc sous la bissectrice, la courbe décrit la frontière des valeurs de v_2 au-dessous desquelles la valeur relative de l'espèce 2 est assez faible pour qu'il ne soit plus désirable de la garder, sachant que l'extinction de celle-ci est irréversible. De même, l'aire au-dessus de la bissectrice est l'ensemble des combinaisons de v_1 et v_2 tel que c'est e_2 qui domine du point de vue rentabilité. La courbe à gauche est ainsi la frontière qui, pour chaque valeur de v_2, donne la valeur critique de v_1 en dessous de laquelle il est optimal de laisser disparaître e_1. L'ensemble des points (v_1, v_2) constituant la surface entre les deux frontières $v_2^*(v_1)$ et la réciproque de $v_1^*(v_2)$, sont des combinaisons de réalisations des deux variables pour lesquelles le producteur conservera tous les éléments de la biodiversité, même si son revenu immédiat est assuré par un seul d'entre eux.

Dans un problème sans incertitude, la décision de laisser disparaître l'espèce qui n'est pas exploitée est prise sans délai ; les deux droites représentant les frontières de la région de conservation sont confondues. Le producteur conserve l'espèce qui a la valeur la plus élevée et se débarrasse de l'autre ; il réduit ainsi ses coûts et maximise son bénéfice. En tenant compte de l'incertitude, qui accentue le problème d'irréversibilité, nous trouvons que la biodiversité a une valeur, consistant en une possibilité d'utilisation future d'une espèce.

L'existence de l'espèce substitut augmente la valeur du producteur par la création de l'option de substitution et donne une valeur à la diversité biologique. En effet, dans l'exemple cité plus tôt, nous trouvons que la valeur d'option nette des coûts de sa détention, atteint les 14% de la valeur totale, lorsqu'elle est à son maximum (sur la ligne d'égalité des deux variables v_1 et v_2). Plus les réalisations de (v_1, v_2) se rapprochent de l'une ou l'autre des frontières critiques, plus l'avantage de l'une des espèces se renforce et plus faible est la valeur du substitut. La valeur d'option s'annule lorsque la valeur relative du substitut atteint le seuil, donné par la pente des frontières critiques, dissipant ainsi la valeur de la biodiversité.

L'importance de cette valeur d'option que procure la diversité biologique crée un espace d'attente ou d'inaction dans lequel la conservation de la biodiversité est optimale ; le producteur est prêt à dépenser pour préserver une espèce malgré son inutilité immédiate. La conservation de la biodiversité n'est pas une option dans le cas certain où la diversité n'a aucune valeur et où les deux frontières critiques se confondent avec la bissectrice. Par contre, dans notre illustration la conservation correspond à la décision du producteur à l'intérieur de l'aire, délimitée par $v_1^{*-1}(v_2)$ et $v_2^*(v_1)$, une surface qui représente presque 53% de l'espace total. Autrement dit, les combinaisons des réalisations (v_1, v_2) pour lesquelles le producteur préserve la biodiversité représentent plus de la moitié des réalisations possibles. On peut en déduire une forte motivation de conservation de la biodiversité décrite par les deux espèces substituts. Une partie des revenus de production sert à assurer l'accès immédiat à l'espèce exploitée et un accès futur possible à celle qui ne l'est pas.

4.8 La valeur marginale de la biodiversité

Simpson, Sedjo et Reid (1996), en tenant compte de la substituabilité de la valeur de production des espèces, trouvent que la valeur de l'espèce marginale est décroissante par rapport au nombre d'espèces disponibles. Plus la biodiversité est riche en termes de ressources, et plus faible est la contribution de l'espèce à la valeur totale. Pour vérifier cette relation, nous allons comparer la valeur de l'espèce en biodiversité à sa valeur en l'absence de diversité.

Dans le contexte de notre modèle, la valeur marginale de la biodiversité est la valeur additionnelle, attribuable à l'espèce marginale. L'espèce marginale sera celle conservée et non exploitée dans l'immédiat et $V_{mi}(v_1, v_2)$ sa contribution à la valeur totale du décideur.

$$V_{mi}(v_1, v_2) = F_j(v_1, v_2) - \frac{1-k}{r-\alpha} v_j \qquad \text{où} \qquad (v_i^*(v_j) < v_i \leq v_j).$$

La valeur de l'espèce marginale est égale à la valeur totale de la biodiversité moins celle d'usage de l'espèce productive. D'après les équations (4.7) et (4.14), $V_{mi}(v_1, v_2)$ est aussi égale à la valeur d'option nette des coûts de conservation :

$$V_{m1}(v_1, v_2) = B_1 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_1} + B_2 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_2} - \frac{k}{r-\alpha} v_1 \qquad \text{où} \qquad (v_1^*(v_2) < v_1 \leq v_2).$$

$$V_{m2}(v_1, v_2) = A_1 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_1} + A_2 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_2} - \frac{k}{r-\alpha} v_2 \qquad \text{où} \qquad (v_2^*(v_1) < v_2 \leq v_1).$$

En l'absence de biodiversité, la valeur d'usage nette $V(v_i)$ de l'espèce qui subsiste est donnée par l'équation (4.2) :

$$V(v_i) = \frac{1-k}{r-\alpha} v_i.$$

Puisqu'il n'y a que deux espèces, $V_{mi}(v_1, v_2)$ représente aussi la valeur de la diversité :

$$V_{mi}(v_1, v_2) = F_j(v_1, v_2) - V(v_j).$$

On peut montrer que la valeur de l'espèce marginale i est croissante avec sa valeur d'usage v_i, elle s'annule en $v_i^*(v_j)$ et atteint son maximum en $v_i = v_j$ (voir annexe A). Pour comparer les valeurs de l'espèce i en présence et en l'absence de e_j, nous illustrons dans la figure 4.2 $V_{mi}(v_1, v_2)$ et $V(v_i)$ dans le plan $v_1 = v_2$. D'après ce graphique on a

$$V(v_i) > V_{mi}(v_1, v_2).$$

Le terme à gauche de l'inégalité est la valeur du sacrifice de laisser disparaître e_i, lorsqu'elle est la seule espèce disponible. Le terme à droite de l'inégalité représente la valeur de ce même sacrifice quand les deux espèces existent. Ce même terme représente aussi la valeur qu'ajoute la diversité à la valeur d'exploitation de e_j. La perte de diversité augmente la

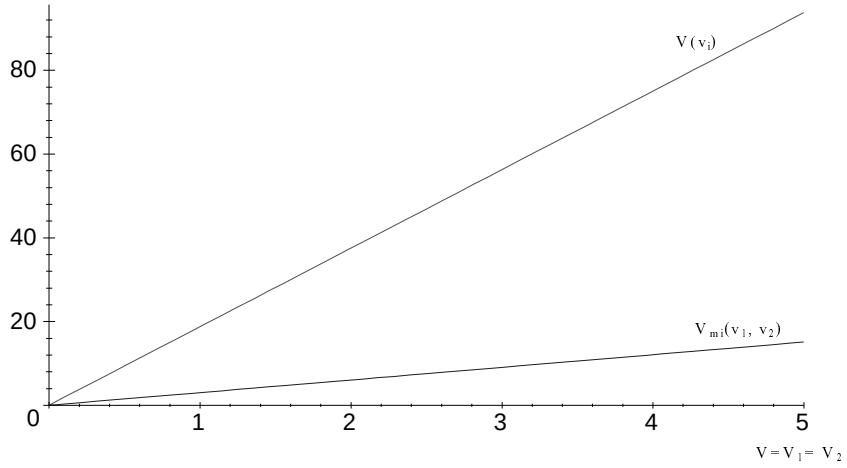


FIG. 4.2 – Valeurs de l'espèce marginale

valeur de l'espèce. Plus le nombre d'espèces disponibles est grand, plus la contribution de l'espèce marginale à la valeur de la biodiversité est faible. Pour notre décideur la perte d'une espèce correspond à celle de la biodiversité et lui enlève toute flexibilité qui lui est associée, alors que ce ne sera pas le cas s'il disposait de trois espèces. Dans ce dernier cas, il gardera toujours la possibilité d'intervertir dans l'usage les deux espèces qui subsistent, ainsi qu'une option d'abandon ; le coût d'opportunité de la perte de l'espèce marginale est moins important.

Ce résultat est similaire à celui de Simpson, Sedjo et Reid (1996) relativement à la décroissance de la valeur marginale de l'espèce par rapport au nombre total d'espèces disponibles.

Plus la proportion (k) du revenu qui doit être investie dans la conservation est élevée et plus la valeur additionnelle générée par la diversité (valeur marginale) est faible relativement à la valeur totale. Il coûte plus cher de conserver la biodiversité, en dépensant aujourd'hui pour maintenir l'option d'une utilisation potentielle future d'une espèce. Le

coût d'opportunité de la diversité augmente, écourtant ainsi la période de conservation[8]. Par contre, plus l'incertitude sur les valeurs futures des espèces est grande, plus la valeur marginale de la diversité est importante. En effet, la valeur de l'opportunité d'une utilisation future de l'espèce substitut augmente ainsi que celle de l'option de l'abandonner. L'écart entre les frontières critiques augmente [9], traduisant le report des décisions de renonciation à la diversité dans le temps. L'existence de la seconde espèce apporte une assurance pour le producteur contre les mauvaises fortunes. Plus ses revenus futurs sont incertains, plus il va accorder de l'importance à cette assurance, ou alternative, fournie par la diversité. Le désinvestissement dans l'actif qu'est l'espèce revient à se départir d'un portefeuille diversifié pour se trouver avec un autre qui ne l'est pas. Plus les valeurs des actifs (espèces) sont volatiles plus le désir de diversification est grand, particulièrement lorsque les réalisations de ces valeurs sont indépendantes.

Nous n'avons considéré qu'une partie de la valeur totale économique de l'espèce. Une sous-évaluation de l'espèce entraîne une sous-évaluation de la biodiversité. Ceci se traduit par une décision de renonciation prématurée relativement à une décision fondée sur une évaluation exhaustive. Mais on croyait que les possibilités de substitution réduisaient la valeur d'une espèce. Nous avons montré qu'une option de substitution, au contraire, confère de la valeur à l'espèce. En effet, la substituabilité crée une valeur d'usage, à travers l'option d'utilisation, pour une espèce dont la valeur de production aurait été nulle, puisqu'elle est non exploitée dans l'immédiat.

Dans ce modèle, l'espèce qui subsiste ne sera jamais abandonnée. La valeur d'option s'annule en l'absence de diversité et puisque les dépenses de conservation sont fixées à une proportion des revenus générés par l'utilisation de l'espèce, il ne sera jamais désirable de la laisser disparaître tant qu'elle est productive. Le coût d'opportunité de son extinction est le revenu du producteur, qui est toujours supérieur aux coûts de conservation qui seront

[8] Voir figure 4.3

[9] Voir figure 4.4

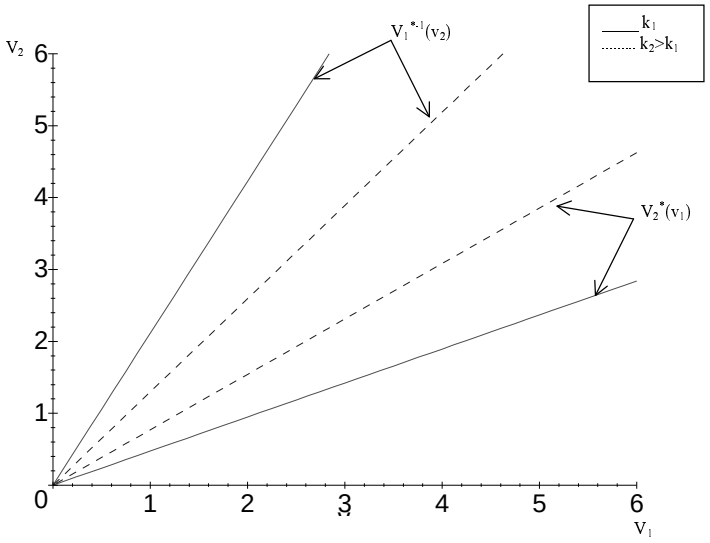


FIG. 4.3 – Effet d'une variation de k sur les frontières critiques

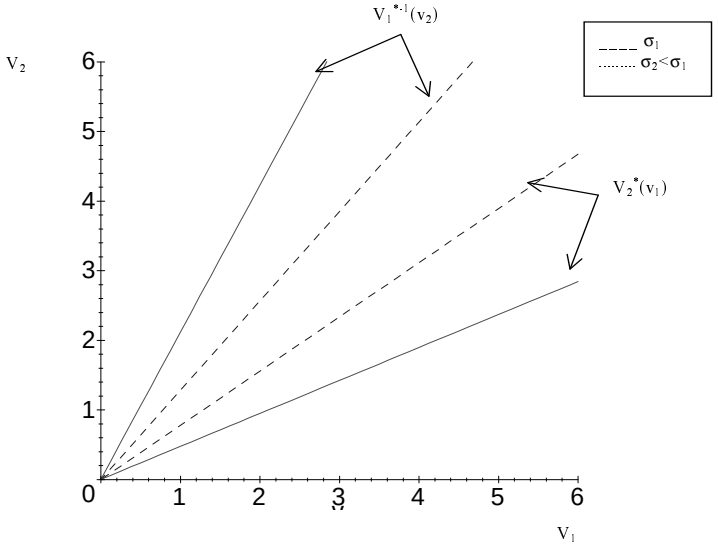


FIG. 4.4 – Effet d'une variation de σ^2 sur les frontières critiques

économisés. Si le coût de conservation ne diminuait pas avec la valeur de l'espèce, un coût constant par exemple, alors il serait optimal de laisser s'éteindre l'espèce qui subsiste pour des réalisations de valeur faibles, et probablement, il existerait des situations où on assisterait à la disparition des deux espèces en même temps.

L'hypothèse d'homogénéité de degré 1 des fonctions de valeur et par suite celle de coûts de conservations proportionnels, nous a permis de résoudre algébriquement le problème d'évaluation de la biodiversité et de décision de conservation. Dans la section suivante, nous délaissons cette hypothèse pour revenir au cas plus général où le coût de conservation est constant et indépendant de la valeur de l'espèce.

4.9 Évaluation numérique de la biodiversité pour le modèle général

Dans cette partie, l'hypothèse d'homogénéité de degré 1 des fonctions de valeur est relâchée. Le coût instantané de conservation d'une espèce est C constant. Pour des réalisations faibles des valeurs des espèces, le profit du décideur peut être négatif. La conservation de la biodiversité devient relativement plus coûteuse que dans le premier modèle. Dans ce cas, il n'est plus plausible que l'espèce qui subsiste sera conservée pour toujours. En l'absence de biodiversité, le décideur garde l'option d'abandonner l'espèce encore disponible si ses revenus le justifient. Une situation de disparition complète de biodiversité est possible.

Sans l'hypothèse d'homogénéité de degré 1, nous ne pouvons aller aussi loin que dans le modèle simple dans la résolution analytique du problème d'évaluation de la biodiversité et de conservation de l'espèce substitut. Cependant, nous nous attendons que les principaux éléments de la règle de décision soient similaires, notamment la dépendance des frontières critiques à l'égard des valeurs relatives des espèces. En revanche ces frontières ne seront pas linéaires et doivent être compatibles avec l'abandon des deux espèces pour des valeurs faibles de ces dernières.

Nous nous proposons donc de déterminer algébriquement la fonction de valeur du décideur et la règle de décision d'abandon, en l'absence de diversité, puis d'utiliser une méthode d'évaluation numérique pour la détermination des valeurs d'option, en présence des deux espèces.

4.9.1 Valeur d'une espèce en l'absence de biodiversité

La valeur du décideur ne disposant que d'une seule espèce comprend les profits de l'usage courant et la valeur de l'option d'abandon. Le problème du décideur, à tout $t < T$, est le suivant :

$$V_a(v_{it}) = \max_T \left\{ E_t \int_t^T e^{-r(s-t)}(v_{is} - C)ds + e^{-r(T-t)}V(v_{iT}) \right\}.$$

La solution de ce problème d'arrêt optimal par l'exercice de l'option d'abandon, donne la fonction de valeur $V_a(v_i)$ et la valeur critique v_i^* au-dessous de laquelle le décideur renonce à la conservation de l'espèce,

$$V_a(v_i) = Dv_i^{\beta_2} + \frac{v_i}{r-\alpha} - \frac{C}{r} \tag{4.23}$$

où :

$$D = \frac{1}{(-\beta_2)(r-\alpha)} v_i^{*(1-\beta_2)}$$

$$v_i^* = \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} \frac{(r-\alpha)C}{r}.$$

Le décideur continue à conserver la seule espèce qui existe même en subissant des pertes. En effet, au moment de l'abandon : $v_i^* = \frac{\beta_2}{\beta_2-1}\frac{(r-\alpha)C}{r} < C$; le revenu d'usage réalisé ne couvre pas le coût de conservation de l'espèce[10]. C'est le résultat bien connu du modèle classique des valeurs d'option (Brennam et Schwartz (1985), Dixit (1989)).

[10] $\frac{\beta_2}{\beta_2-1}\frac{(r-\alpha)}{r} < 1$.

4.9.2 Résultats de l'évaluation numérique :

Nous gardons la symétrie des mouvements des valeurs des espèces v_1 et v_2 (voir (4.1)). Prendre des valeurs différentes pour les paramètres de tendance (α) et de volatilité (σ) n'apporte aucun élément intéressant pour la discussion poursuivie et les objectifs de l'analyse. En effet, on ne fera qu'avantager ou défavoriser les réalisations des valeurs d'une espèce par rapport à l'autre.

En ce qui concerne le coefficient de corrélation de l'incertitude autour des réalisations des valeurs des espèces, il peut être non nul si certains chocs qui affectent ces dernières sont communs. Certaines découvertes (scientifiques, écologiques) peuvent concerner les deux espèces. Les deux espèces ont en commun l'usage qui leur confère une valeur de production. Des chocs sur les connaissances, sur les goûts, ou sur les technologies utilisant les espèces seront communs et les affecteront de manières corrélées. La corrélation est positive si elle augmente ou diminue la valeurs des deux espèces en même temps ; elle est négative si elle renforce l'avantage d'une espèce par rapport à l'autre. Nous simulons le modèle d'abord sans covariance, puis avec des covariances positive et négative entre v_1 et v_2.

Étant donné que notre objectif est d'apporter des réponses plutôt qualitatives que quantitatives à la question d'évaluation et de conservation d'espèces substituables, le choix des valeurs des paramètres est en fait arbitraire. Nous supposons que sur une année, l'écart-type du taux de variation de la valeur de l'espèce est $\sigma = 0.2$ et le taux de croissance déterministe est $\alpha = 0.04$. Le taux d'intérêt annuel est $r = 0.08$ et le coût de conservation d'une espèce est $C = 4$. La méthode d'évaluation est décrite dans l'annexe B.

La figure 4.5 reproduit les courbes des frontières critiques $v_1^*(v_2)$ et $v_2^*(v_1)$ dans un repère (v_1, v_2). Les courbes ${v_1^*}^{-1}(v_2)$ et $v_2^*(v_1)$ se rejoignent au point (v_1^*, v_2^*) sur la bissectrice $(v_1^* = v_2^*)$. Ce point correspond aux seuils critiques d'abandon pour chaque espèce, en l'absence de biodiversité.

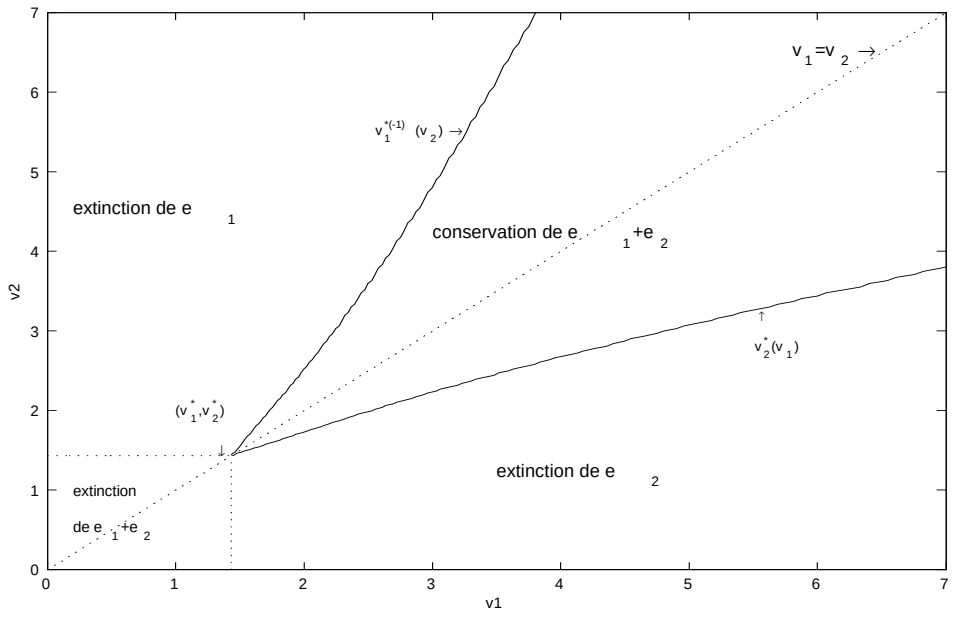


FIG. 4.5 – Décision de conservation : frontières critiques

Pour toutes les combinaisons des réalisations entre les deux courbes, le décideur conserve les deux espèces. C'est dans cette situation que la biodiversité a une valeur, au-delà de celle de l'espèce en usage. Lorsque v_2 observée est inférieure ou égale à $v_2^*(v_1)$ et $v_1 > v_1^*$, il est optimal de ne conserver que l'espèce productive 1. Ici la biodiversité est sans valeur mais l'espèce 1 a tout de même une valeur d'usage. De même quand $v_1 \leq v_1^*(v_2)$ et $v_2 > v_2^*$, le décideur a intérêt à ne préserver que l'espèce productive 2. Dans ces deux régions, l'utilisateur continue à exploiter et conserver l'espèce qui subsiste. Par contre si les valeurs des deux espèces sont chacune plus faible que v_i^*, aucune espèce ne justifie son coût de conservation et la décision optimale est de mettre fin à l'existence des deux espèces. Non seulement la valeur de la biodiversité est-elle nulle ; les valeurs d'existence des espèces le sont aussi.

Dans un environnement défavorable aux deux espèces, leur extinction est inévitable.

Les coûts de conservation sont relativement élevés par rapport à leurs valeurs d'usage, de sorte que le décideur renonce à toute activité. La probabilité d'une reprise en faveur de l'une des espèces est faible, si bien qu'elle ne justifie pas l'exposition à de plus lourdes pertes.

Sur la frontière $v_j^*(v_i)$, le rapport $\frac{v_i}{v_j}$ est croissant. Lorsque les réalisations s'améliorent pour les deux espèces, la valeur relative de v_i par rapport à v_j, sur la frontière critique, est de plus en plus grande. Autrement dit, il faut que la dominance de l'espèce qui va subsister soit de plus en plus marquée pour justifier la perte de diversité.

La valeur d'option associée à la biodiversité est régie par deux courants. D'un côté, les augmentations de la valeur d'usage v_j de l'espèce non productive rapprochent le point (v_1, v_2) de la bissectrice et de l'autre côté celles de v_i[11] l'attirent vers la région critique. En effet, s'il y a une hausse de v_j l'opportunité de substituer les espèces dans l'usage prend de la valeur et celle de renoncer à l'espèce en question en perd. Ceci résulte en une augmentation de la valeur de la biodiversité. Par contre, lorsque ce sont les réalisations de v_i[12] qui sont à la hausse nous avons l'effet contraire. La probabilité d'utiliser l'option de substitution diminue et celle de renoncer à la diversité augmente. Un rapport $\frac{v_i}{v_j}$ croissant, exprime la prédominance d'une progression de v_j sur celle de v_i et donc de l'option de substitution sur l'option d'abandon.

Le processus d'évolution des valeurs des deux espèces fait que, quand les réalisations sont élevées, il y a beaucoup de chance qu'elles le restent. Dans cette zone de valeurs, le décideur donne relativement plus de chance à l'espèce inutilisée en gardant l'option de s'en servir et celle de reporter la perte de diversité plus longtemps. Avec la valeur d'option qui augmente et le coût de détention (de conservation) constant, l'incitation à préserver la biodiversité est plus forte.

La figure 4.6 représente les règles de décision de conservation dans les deux modèles :

[11] Valeur de l'espèce productive.

[12] Valeur de l'espèce productive.

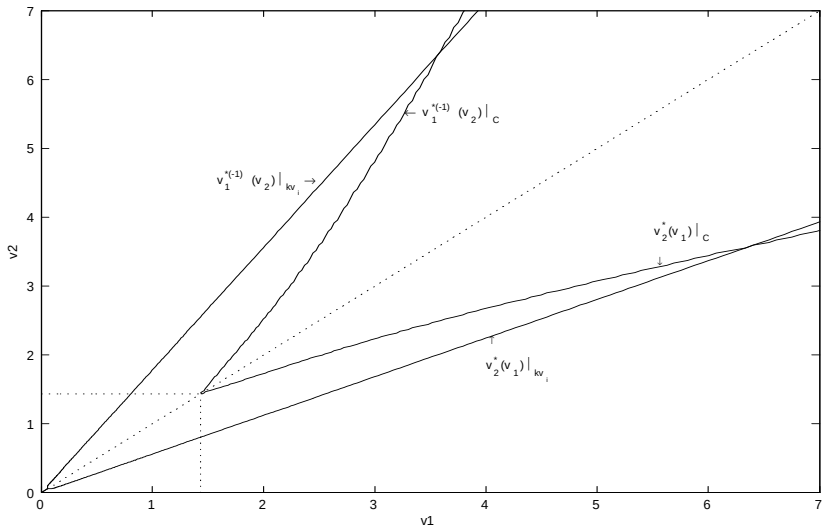


FIG. 4.6 – Règles de décision avec les deux types de coût de conservation

avec coûts proportionnels et avec coûts constants. Avec un coût de conservation proportionnel à la valeur d'usage, la conservation est plus importante pour des réalisations de valeurs d'usage (v_1, v_2) relativement faibles. Tant que le décideur choisit l'usage le plus rentable, les profits courants sont toujours positifs, ce qui n'est pas le cas pour le deuxième modèle. Il n'y a de désintérêt pour la conservation de l'espèce substitut que lorsque sa valeur d'option ne justifie plus les dépenses.

À partir d'un certain point, la situation se renverse et c'est le modèle à coûts constants qui donne une plus grande valeur à la biodiversité et donc à la conservation. En effet, pour une même réalisation v_1, par exemple, le décideur qui supporte des coûts de conservation constants, renonce à l'espèce 2 à une valeur d'usage v_2 plus élevée avant le point d'intersection des frontières $v_2^*(v_1)$ et moins élevée au-delà. À l'encontre du premier modèle, plus les réalisations de v_2 sont bonnes plus le coût relatif de la conservation de e_2 est faible, par rapport à sa valeur d'option. L'avantage des coûts proportionnels, pour la conservation, disparaît lorsque les valeurs d'usages sont assez élevées. Leur croissance avec la valeur

de l'espèce non exploitée favorise l'extinction, en dissipant la valeur d'option reliée à la diversité.

Impact de l'incertitude sur la décision de conservation

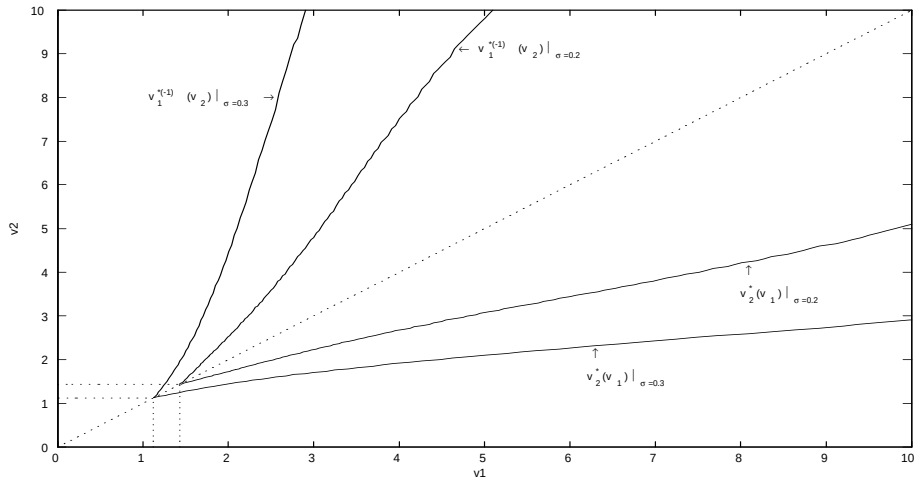


FIG. 4.7 – Effet d'une variation de l'incertitude

Une hausse de l'incertitude affecte la décision de conservation à deux niveaux. Tout d'abord, le seuil critique d'abandon de l'espèce en l'absence de diversité diminue. La valeur d'option associée à la conservation et l'exploitation de l'espèce qui subsiste augmente et ralentit ainsi le désinvestissement. Ensuite, en biodiversité, la valeur de l'espèce marginale augmente avec la volatilité des valeurs futures d'usage ainsi que le désir de conservation. Notons que plus les réalisations sont élevées plus l'impact de l'incertitude sur la valeur de la biodiversité, ou plus précisément sur la valeur des options qu'elle crée, est important, reportant encore plus la perte de diversité[13].

[13] Voir figure 4.7.

Impact de la corrélation des valeurs des espèces sur la décision de conservation

Avec une corrélation entre les chocs qui affectent les valeurs d'usage futures, les frontières critiques délimitant les régions de disparition de la diversité se rapprochent de la bissectrice. L'espace des réalisations (v_1, v_2) pour lesquelles le décideur conserve la biodiversité se contracte (voir figures 4.8 et 4.9). Cette corrélation produit un effet similaire à une réduction de l'incertitude sur les réalisations futures. Elle affaiblit l'incitation à la conservation. Plus les réalisations des variables sont élevées, plus l'effet de la corrélation est renforcé ; l'écart entre les nouvelles et les premières courbes[14] est plus important.

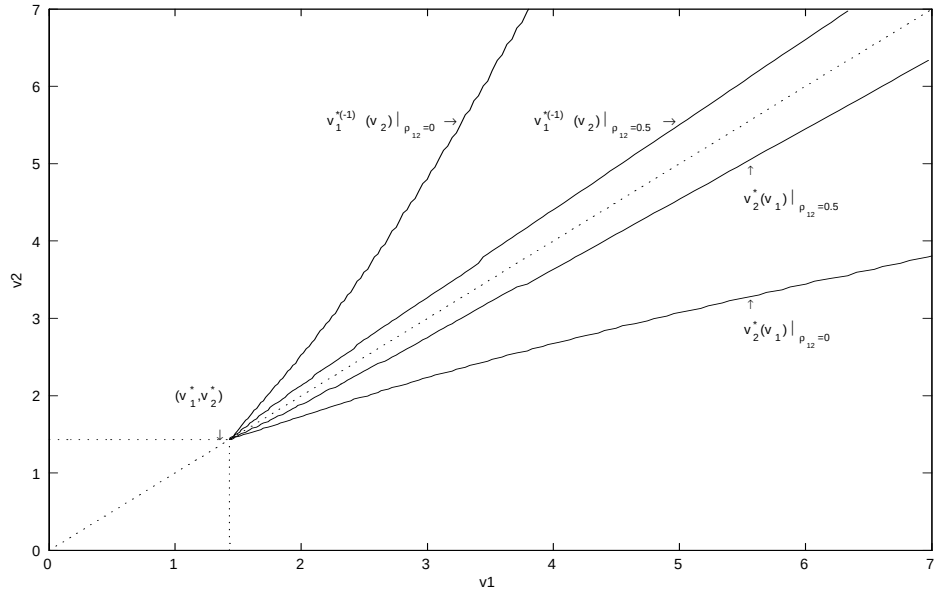


FIG. 4.8 – Effet d'une corrélation positive.

En effet, une partie du choc affecte de la même manière les deux variables (espèces), lorsque $\rho_{12} > 0$, le décideur peut alors ignorer cette catégorie de l'incertitude qui ne lui apporte aucune information additionnelle pour l'aider à prendre sa décision. Elle ne lui

[14] Les frontières critiques obtenues avec $\rho_{12} = 0$.

permet pas de promouvoir une espèce par rapport à l'autre. Par conséquent, il ne va intégrer que la partie de l'incertitude pertinente dans son processus de décision, ce qui équivaut à une diminution de la volatilité des réalisations.

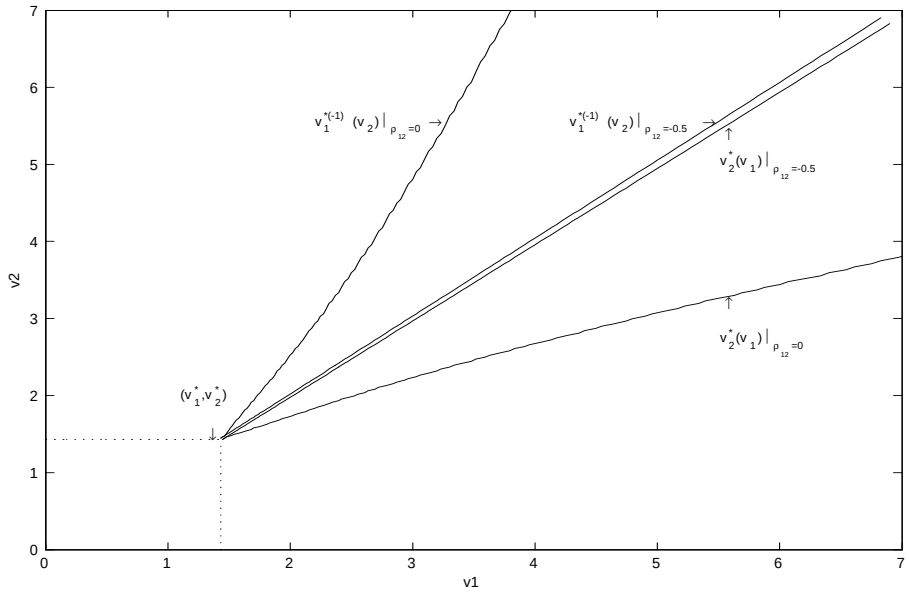


FIG. 4.9 – Effet d'une corrélation négative

Lorsque $\rho_{12} < 0$, il y a beaucoup de chance qu'un choc favorable sur la valeur d'usage de l'une des espèce, s'accompagne d'un choc défavorable sur la valeur de l'autre. L'avantage d'une espèce par rapport à l'autre s'affirme plus rapidement : c'est comme si la résolution de l'incertitude est accélérée dans le sens que le décideur reçoit l'information dont il a besoin pour prendre sa décision en moins de temps.

Une corrélation des réalisations de v_1 et v_2 réduit la valeur de l'espèce marginale et donc celle de la biodiversité. Il s'ensuit une motivation plus faible pour la conservation des espèces.

Avec une corrélation parfaite positive $\rho_{12} = 1$, la biodiversité n'a aucune valeur ; La valeur d'option de substituer les espèces disparaît. Le problème du décideur se résume alors

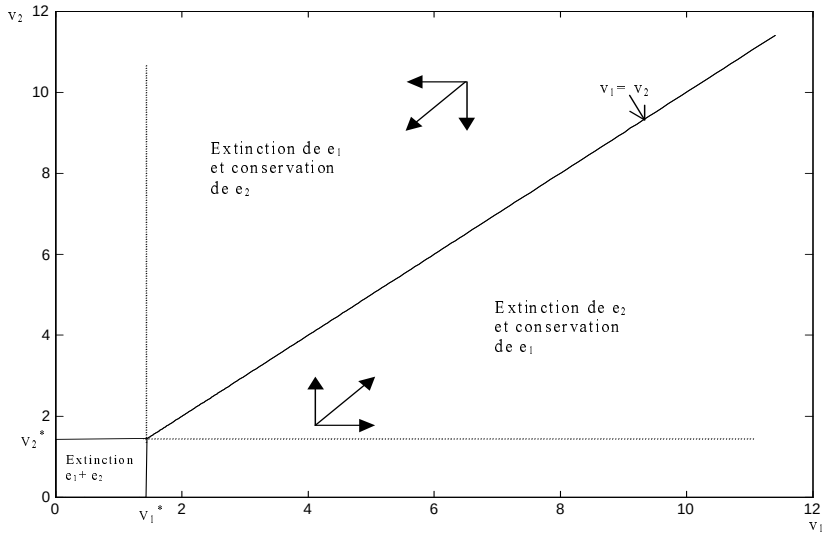


FIG. 4.10 – Décision de conservation avec corrélation parfaite positive

à déterminer v_i^* ; $i = 1$ si initialement $v_1 > v_2$ et $i = 2$ si $v_2 > v_1$. L'espèce la moins rentable est abandonnée immédiatement puisqu'on n'espère pas qu'à un moment futur elle peut devenir plus intéressante que l'espèce exploitée : la probabilité que v_i et v_j augmentent (diminuent) dans la même proportion est de 0.5, de sorte que le ratio $\frac{v_i}{v_j}$ est constant dans le temps. La décision porte donc sur la détermination du seuil v_i^* jusqu'auquel le décideur est prêt à conserver l'espèce i qui subsiste. On retrouve ici le modèle d'options réelles standard comme un cas particulier du modèle que nous avons adopté pour l'évaluation de la biodiversité (figure 4.10).

4.10 Conclusion

Notre modélisation de la valeur d'usage direct de la biodiversité et du problème d'exploitation de ses composantes à des fins de production est sans doute très simplifiée. Néanmoins, elle résume les aspects les plus importants dans l'évaluation de la biodiver-

sité, soit l'irréversibilité de l'extinction des espèces et l'incertitude autour des valeurs et des possibilités d'usage futurs des espèces.

Nous avons montré comment on peut aller au-delà d'une évaluation standard d'option, qui confère de la valeur aux espèces individuellement, pour évaluer l'option de substitution de ces espèces dans l'usage qui est source de valeur pour la biodiversité.

Dans les deux modèles considérés, avec coût de conservation proportionnel et coût constant, nous trouvons que la flexibilité associée à la diversité peut justifier une disposition à la conservation de la part du décideur. La biodiversité crée des options réelles, qui trouvent leur origine dans la substituabilité de ses ressources. Cette caractéristique même a été désignée comme la cause de la sous-évaluation de la valeur d'usage de la biodiversité et donc comme un handicap pour la préservation des espèces. Le désinvestissement dans une espèce entraîne la dissipation de la biodiversité. Le coût d'opportunité de cette décision consiste en une perte de la possibilité de prendre cette même décision plus tard dans le temps et de celle de faire usage de l'espèce à tout moment futur.

Pour la résolution du problème du décideur, nous avons déterminé sa valeur dans chaque état possible : une seule espèce est conservée, les deux espèces sont conservées. Nous avons scindé la région de diversité en deux sous-espaces, correspondant chacun à l'exploitation de l'espèce à valeur d'usage la plus élevée et à la conservation de toutes les ressources disponibles. Nous avons pu ainsi évaluer implicitement l'option de permutation entre les espèces ou les usages.

La règle de décision de désinvestissement dans la conservation des espèces est décrite par deux frontières critiques qui séparent des deux côtés la région de continuation (préservation) des régions d'arrêt (extinction), dans l'espace des combinaisons possibles des valeurs des espèces. Dans le modèle où le coût de conservation est constant, les régions d'arrêt comprennent un sous-espace de faibles réalisations dans lequel il y a un abandon total des ressources de la biodiversité.

La valeur de l'espèce marginale ou encore la valeur marginale de la biodiversité est

exprimée par la valeur d'option qui lui est attachée. Elle décroît avec le nombre d'espèces disponibles. Plus la biodiversité est riche en ressources, plus le coût d'opportunité de l'extinction d'une espèce, une perte marginale de biodiversité, est faible. Dans ce cas, le décideur garde toujours une flexibilité assez importante en renonçant à l'espèce marginale.

L'incertitude sur les valeurs d'usage futures augmente la valeur d'option, et donc celle de l'espèce marginale, et élargit la région de conservation. Par contre, l'augmentation de la covariance entre les chocs qui perturbent les valeurs d'usage se recoupe avec une diminution de l'incertitude sur les valeurs relatives des espèces ; la conservation ou l'attente est moins longue.

4.11 Annexes

4.11.1 Annexe A : valeur de l'espèce marginale

- $v_1^*(v_2) \leq v_1 < v_2$: espèce marginale est e_1

$$V_{m1}(v_1, v_2) = B_1 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_1} + B_2 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_2} - \frac{k}{r-\alpha} v_1$$

$$\frac{\partial V_{m1}}{\partial v_1} = \beta_1 B_1 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_1 - 1} + \beta_2 B_2 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_2 - 1} - \frac{k}{r-\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 V_{m1}}{\partial v_1^2} = \beta_1(\beta_1 - 1) B_1 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_1 - 2} + \beta_2(\beta_2 - 1) B_2 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_2 - 2}$$

$\beta_1 > 1$ et $\beta_2 < 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 V_{m1}}{\partial v_1^2} > 0 \Longrightarrow \frac{\partial V_{m1}}{\partial v_1}$ est croissante en v_1

À $v_1 = v_1^*(v_2)$: $\frac{\partial V_{m1}}{\partial v_1} = 0$ $(4.15) \Longrightarrow \not\vdash v_1 /$ $v_1^*(v_2) < v_1 < v_2$: $\frac{\partial V_{m1}}{\partial v_1} > 0$

Donc la valeur de l'espèce marginale $V_{m1}(v_1, v_2)$ est croissante en v_1.

- $v_2^*(v_1) \leq v_2 < v_1$: espèce marginale est e_2

$$V_{m2}(v_1, v_2) = A_1 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_1} + A_2 v_2 (\frac{v_1}{v_2})^{\beta_2} - \frac{k}{r-\alpha} v_2$$

$$\frac{\partial V_{m2}}{\partial v_2} = (1-\beta_1)A_1(\frac{v_1}{v_2})^{\beta_1} + (1-\beta_2)A_2(\frac{v_1}{v_2})^{\beta_2} - \frac{k}{r-\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 V_{m2}}{\partial v_2^2} = -\beta_1(1-\beta_1)A_1 {v_2}^{-(1+\beta_1)}{v_1}^{\beta_1} - \beta_2(1-\beta_2)A_2 {v_2}^{-(1+\beta_2)}{v_1}^{\beta_2}$$

$\beta_1 > 1$ et $\beta_2 < 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 V_{m2}}{\partial v_2^2} > 0 \Longrightarrow \frac{\partial V_{m2}}{\partial v_2}$ est croissante en v_2

À $v_2 = v_2^*(v_1)$: $\frac{\partial V_{m2}}{\partial v_2} = 0$ (4.10)$\Longrightarrow \nvdash v_2/ \quad v_2^*(v_1) < v_2 < v_1$: $\quad \frac{\partial V_{m2}}{\partial v_2} > 0$

Donc la valeur de l'espèce marginale $V_{m2}(v_1, v_2)$ est croissante en v_2.

Sur la bissectrice ($v_1 = v_2$) : $\quad V_{m1}(v_1, v_2) = V_{m2}(v_1, v_2)$ (4.17) et la valeur marginale de la biodiversité atteint son maximum.

4.11.2 Annexe B : description de la méthode d'évaluation numérique

Les valeurs des espèces v_1 et v_2 suivent des processus de diffusion symétriques :

$$\frac{dv_i}{v_i} = \alpha dt + \sigma dz_i$$

$$E(dz_1 dz_2) = \rho_{12}$$

Une année est subdivisée en un nombre T ($T = 365$) d'intervalles de temps Δt ($\Delta t = \frac{1}{T}$). Le taux d'actualisation μ correspondant à une période de temps Δt est défini comme suit : $\mu = (1 + r\Delta t)^T - 1$.

La situation de départ est décrite par des réalisations observées (v_1, v_2) identiques, nous posons $v_0 = 4$ comme valeur initiale pour les deux variables. À ce stade, nous considérons que les réalisations des variables d'état sont indépendantes : $\rho_{12} = 0$.

Approximation des processus continus par une loi binomiale : $\rho_{12} = 0$

Pour calculer numériquement la valeur d'option et déterminer par la suite les frontières critiques, nous nous basons sur un algorithme dans lequel la fonction de valeur

est construite par itération sur une fonction initiale en utilisant la définition même de la dynamique de choix du décideur. Tout d'abord, nous procédons à une approximation les mouvements Browniens géométriques continus par une loi binomiale. L'arbre binomial correspondant aux processus continus est construit selon l'approche de Cox-Ross-Rubinstein. Les caractéristiques de l'arbre binomial, soit le saut à la hausse, le saut à la baisse et la probabilité de chacun de ces évènements, sont :

$$h_i = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$b_i = \frac{1}{h_i}$$

$$p_i = \frac{e^{\alpha\Delta t} - b_i}{h_i - b_i}$$

Cette approximation est valide pour les deux processus des deux variables d'état v_1 et v_2, lorsque les deux distributions continues sont indépendantes ($\rho_{12} = 0$). Le calcul des probabilités conditionnelles dans le cas où $\rho_{12} \neq 0$ est présenté dans l'annexe C.

Calcul de la fonction de valeur

Partant de l'arbre binomial décrit plus haut, on génère un vecteur (de dimension N) de valeurs possibles centrées sur la valeur initiale (v_0) pour chacune des variables v_1, v_2. Par construction, les éléments de ces vecteurs sont ordonnés du plus petit au plus grand. L'espace des réalisations possibles (v_1, v_2) est composé de toutes les combinaisons possibles des éléments de ces deux vecteurs.

Pour chaque valeur possible de v_i $(i = 1, 2)$ correspond une valeur finale espérée $V_{ai}(v_i)$[15] , qui prend la valeur 0 pour les réalisations inférieures à v_i^*. Puis, pour toutes les combinaisons possibles (v_1, v_2), $\max\{V_{a1}(v_1), V_{a2}(v_2)\}$ sera un élément d'une matrice

[15] Équation (4.23).

W (de dimension $N \times N$), dont les éléments couvriront tous les points de l'espace des réalisations. Étant donné la symétrie entre les deux variables d'état, W est une matrice symétrique par rapport à la diagonale et chaque partie au-dessus et au-dessous de la diagonale représente une région de dominance de l'une et l'autre des espèces. Les éléments de la matrice W constituent les valeurs de départ pour la construction de la matrice F correspondant à la fonction de valeur $F(v_1, v_2)$.

La matrice F est construite par itérations successives en commençant par la fin, c'est à dire par une situation où l'option d'abandon est exercée immédiatement, ce qui implique que F et W sont identiques lors de la première itération. chaque itération applique un processus d'optimisation par lequel le producteur choisit la décision qui maximise sa valeur, entre attendre et continuer à conserver les deux espèces, d'une part, et laisser disparaître l'espèce non-productive dans l'immédiat, d'autre part. En partant avec une matrice initiale $F_{iter=0} = W$, à chaque itération nous corrigeons la valeur des éléments de F (issue de l'itération précédente) en la comparant à sa valeur espérée au bout de Δt :[16] :

$$\begin{aligned} F_{iter}(l,c) \quad = \quad \max \Big\{ & F_{(iter-1)}(l,c); \frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}(v_i - 2C)\Delta t + \frac{1}{(1+\mu)^{\Delta t}}(p_1 p_2 F_{iter-1}(l+1, c+1) \\ & + p_1(1-p_2)F_{iter-1}(l+1, c-1) + (1-p_1)(1-p_2)F_{iter}(l-1, c-1) \\ & + (1-p_1)p_2 F_{iter}(l-1, c+1)\Big\} \end{aligned}$$

$v_i = \max\{v_1, v_2\}$ au point (l, c). Chaque élément révisé est intégré dans F_{iter} et est utilisé pour la correction des éléments suivants.

À la fin de chaque itération, les nouvelles valeurs calculées pour les éléments de F sont comparées à leurs valeurs avant le début de l'itération courante. Si la différence de valeur de l'élément qui a subi le plus grand changement est inférieure à un certain critère de convergence, les itérations s'arrêtent.

[16] (l, c) : point correspondant à la $l^{ième}$ ligne et la $c^{ième}$ colonne.

Notons que les premières et dernières lignes et colonnes de F ne sont pas touchées par la correction apportée aux autres éléments de la matrice. La $1^{ère}$ ligne et la $1^{ère}$ colonne correspondent respectivement à l'axe des v_1 ($v_2 = 0$) et à l'axe des v_2 ($v_1 = 0$). Pour ces combinaisons de valeurs, il est optimal d'abandonner l'espèce sans valeur si bien que les valeurs initiales sont correctes dans ce cas. L'invariabilité de la $N^{ième}$ ligne et la $N^{ième}$ colonne de F borne la correction des éléments correspondant aux valeurs élevées de v_1 et de v_2. Les effets de l'erreur d'évaluation qui en découle, faiblissent lorsqu'on s'éloigne de ces deux extrémités. Il suffit que N soit assez grand pour obtenir une approximation satisfaisante de la fonction de valeur sur des intervalles de v_1 et v_2 acceptables.

Détermination des frontières critiques

Pour extraire les courbes des valeurs critiques $v_i^*(v_j)$ ($i = 1, j = 2$ et $i = 2, j = 1$) et les représenter dans un repère (v_1, v_2), les étapes suivantes sont nécessaires :

- Déterminer la région où uniquement e_j subsiste, en vérifiant l'égalité : $F(l, c) = W(l, c)$ dans la partie de dominance de e_j.
- Faire correspondre à ces éléments de F les combinaisons (v_1, v_2).
- Trier les points (v_1, v_2) pour ne retenir que ceux qui délimitent la région en question : pour v_j donné retenir v_i le plus élevé, puis pour un même v_i, retenir v_j le plus faible.

4.11.3 Annexe C : calcul des probabilités conditionnelles

Le calcul des probabilités conjointes des réalisations de v_1 et v_2 est basée sur le travail de Boyle (1998). Soient la notation suivante :

v_1^o : valeur courante de e_1.

v_2^o : valeur courante de e_2.

$v_1^o u_1$: valeur de e_1 après un saut à la hausse.

$v_2^o u_2$: valeur de e_2 après un saut à la hausse.

$v_1^o d_1$: valeur de e_1 après un saut à la baisse.

$v_2^o d_2$: valeur de e_2 après un saut à la baisse.

$v_1^o M_1$: moyenne de la distribution lognormale de v_1.

$v_2^o M_2$: moyenne de la distribution lognormale de v_2.

$(v_1^o)^2 V_1$: moyenne de la distribution lognormale de v_1.

$(v_2^o)^2 V_2$: moyenne de la distribution lognormale de v_2.

$v_1^o v_2^o R$: espérance conjointe de v_1 et v_2.

$$M_i = e^{\alpha_i h}$$

$$V_i = M_i^2 \left[e^{\sigma_i^2 h} - 1 \right]$$

$$R = M_1 M_2 e^{\rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 h}$$

$$u_i = e^{\lambda \sigma_i \sqrt{h}}$$

Les évènements possibles se résument à quatre situations :

Évènement	probabilité	valeur de e_1	valeur de e_2
E_1	p_1	$v_1^o u_1$	$v_2^o u_2$
E_2	p_2	$v_1^o u_1$	$v_2^o d_2$
E_3	p_3	$v_1^o d_1$	$v_2^o d_2$
E_4	p_4	$v_1^o d_1$	$v_2^o u_2$

En égalisant les espérances et variances des distributions continue et discrète, on obtient les probabilités en fonction des sauts.

$$(p_1 + p_2) v_1^o u_1 + (p_3 + p_4) v_1^o d_1 = v_1^o M_1$$

$$(p_1 + p_4)v_2^o u_2 + (p_2 + p_3)v_2^o d_2 = v_2^o M_2$$

$$(p_1 + p_2)((v_1^o)^2 u_1^2 - (v_1^o)^2 M_1^2) + (p_3 + p_4)((v_1^o)^2 d_1^2 - (v_1^o)^2 M_1^2) = (v_1^o)^2 V_1$$

$$(p_1 + p_4)((v_2^o)^2 u_2^2 - (v_2^o)^2 M_2^2) + (p_2 + p_3)((v_2^o)^2 d_2^2 - (v_2^o)^2 M_2^2) = (v_2^o)^2 V_2$$

$$(p_1 u_1 u_2 + p_2 u_1 d_2 + p_3 d_1 d_2 + p_4 d_1 u_2)v_1^o v_2^o = v_1^o v_2^o R$$

avec :

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

$$u_1 d_1 = 1$$

$$u_2 d_2 = 1$$

Nous avons deux espèces symétriques :

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

$u_1 = u_2 = u$

$d_1 = d_2 = d$

$M_1 = M_2 = M$

$V_1 = V_2 = V$

Les évènements E_2 et E_4 se produisent avec la même probabilité : $p_2 = p_4$.

À partir de ces huit conditions, on obtient les probabilités :

$$p_2 = p_4 = \frac{(Mu-1)(1-u^4)+(Ru^2-1)(u^2-1)}{(u^2-1)(2u^2-3u^4+1)}$$

$$p_1 = \frac{Vu^2+M^2u^2-1}{(u^2-1)} - p_4$$

$$p_3 = \frac{Ru^2-u^2}{(1-u^4)} - p_4\frac{2u^2-2u^4}{(1-u^4)}$$

On fixe λ de façon à avoir des valeurs acceptables pour les probabilités.

Chapitre 5

Conclusion générale

La présence d'options diverses pour la réalisation d'un projet confère une valeur additionnelle à la flexibilité et, le choix entre ces options est déterminé par leurs valeurs relatives. Cette flexibilité est valorisée par une plus grande volatilité de la variable sous-jacente à la décision d'investissement.

Avec une opportunité de constituer un portefeuille de technologies, l'irréversibilité des engagements réels crée des délais dans l'investisssement et ainsi une divergence par rapport à la sélection d'un portefeuille financier. L'investissement n'aboutit pas toujours à un portefeuille final diversifié même si les valeurs des actifs (technologies) ne sont pas corrélés. Cependant, nous avons montré que dans les cas où l'attente n'est pas optimale le portefeuille diversifié est dominant. La prime de flexibilité associée à la diversification technologique stimule l'investissement : l'investisseur est moins exigeant quand il s'agit d'acquérir la technologie par l'exercice d'une option de diversification plutôt que par l'exercice d'une option de spécialisation.

Considérant la situation inverse, c'est à dire les décisions de renonciation à la diversification, nous avons pris le cas du portefeuille de ressources naturelles. Nous avons montré qu'un modèle d'options réelles peut être adapté à l'évaluation de la biodiversité, non pas

par les valeurs individuelles de ses ressources mais plutôt par les possibilités de substitution de celles-ci dans l'usage ou des options de substitution de leurs usages. La flexibilité reliée à la biodiversité peut justifier une disposition non négligeable à sa conservation et donc une réticence du décideur à échanger un portefeuille naturel diversifié contre un autre qui ne l'est pas.

Bibliographie

[1] Amran, Martha. & Kulatilaka, Nalin. (1999) "Real Options : Managing Strategic Investment in an Uncertain World", Harvard Business School Press. Boston, Massachusetts.

[2] Bar-Ilan, A. & Strange, W.C. (1998) "A Model of Sequential Investment", Journal of Economic Dynamics and Control, 22, 437-463.

[3] Bernanke, Ben.S. (1983) "Irreversibility, Uncertainty, and Cyclical Investment", Quarterly Journal of Economics, 98, 85-106.

[4] Boyer, M. & Lasserre, P. & Mariotti, T. & Moreaux, M. (1998) "Industry Development under Alternative Market Structures", Working Paper, Toulouse, GREMAQ.

[5] Boyle, Phelim.P. (1988) "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 23(1), 1-12.

[6] Brennan, M.J. & Schwartz, E.S. (1985) "Evaluating Natural Resource Investments", Journal of Business, 58, 135-157.

[7] Child, P.D. & Ott, S.H. & Triantis, A.J. (1998) "Capital Budgeting for Interrelated Projects : A Real Options Approach", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 33(3), 305-34.

[8] Cox, John.C. & Ross, Stephen.A. & Rubinstein, Mark. (1979) "Option Pricing : a Simplified Approach", Journal of Financial Economics, 7, 229-63.

[9] Dixit, Avinash. (1989) "Entry and Exit Decision under Uncertainty", Journal of Political Economy, 97, 620-638.

[10] Dixit, Avinash. (1991) "Irreversible Investment with Price Ceilings", Journal of Political Economy, 99, 541-557.

[11] Dixit, Avinash. (1993) "The Art of Smooth Pasting", 55 in Fundamentals of Pure and Applied Economics, eds.Jacques Lesourne and Hugo Sonnenschein. Chur, Switzerland : Harwood Academic Publisher.

[12] Dixit, A. & Pindyck, R.S. (1994) "Investment under Uncertainty" Princeton University Press, Princeton.

[13] Dixit, A. (1995) "Irreversible Investment with Uncertainty and Scale Economies", Journal of Economic Dynamics and Control, 19, 327-350.

[14] Épaulard, Anne., Gallon, Stéphane. (2001) "La Valorisation du Projet Nucléaire EPR par la Méthode des Options Réelles", Économie et Prévision, 149, 29-50.

[15] Fisher Anthony.A. & Hanemann, Michael.W. (1986) "Option Value and the Extinction of Species", Advances in Applied Microeconomics, 4, 169-90.

[16] Fisher Anthony.A. & Hanemann, Michael.W. (1987) "Quasi-Option Value : Some Misconceptions dispelled", Journal of Environmental economics and Management, 14, 183-190.

[17] Fischer, Donald.E. & Jordan, Ronald.J. (1991) "Security Analysis and Portfolio Management", PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey 07632. $5^{ème}$édition.

[18] Fromm, Oliver. (2000) "Ecological Structure and Functions of Biodiversity as Elements of Its Total Economic Value", Environmental and Resource Economics, 16(3), 303-28.

[19] Grenadier, S.R. & Weiss, A.M. (1997) "Investment in Technological Innovations : An Option Pricing Approach", Journal of Financial Economics, 44, 397-416.

[20] He, H. & Pindyck, R.S. (1992) "Investment in Flexible Production Capacity", Journal of Economic Dynamics and Control, 16, 575-599.

[21] Henry, Claude. (1974) "Investment Decision Under Uncertainty : The Irreversibility Effect", American Economic Review, 64(6), 1006-1012.

[22] Herbelot, Olivier. (1992) "Option Valuation of Flexible Investment : The Case of Environmental Investments in Electric Power Industry", Thèse de Doctorat, Massachusetts Institute of Technology.

[23] McDonald, R. & Siegel, D.R (1985) "Investment and The Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down", International Economic Review, 26, 331-349.

[24] McDonald, R. & Siegel, D.R. (1986) "The Value of Waiting to Invest", The Quarterly Journal of Economics, 101(November), 707-727.

[25] Moran, Dominic. & Bann, Camill. (2000) "The Valuation of Biological Diversity for National Actions Plans and Strategies", Rapport préparé pour le Programme d'Environnement des Nations Unies.

[26] Morissette, Denis. (1993) "Valeurs Mobilières et Gestion de Portefeuille", Les Éditions SMG.

[27] Norton, Bryan. (1988) "Commodity, Amenity and Morality : the Limits of Quantification in Valuing Biodiversity", Chapitre 22, Biodiversity, Ed E.O.Wilson. Washington D.C. : National Academy Press.

[28] Paddock, J.L. & Siegel, D.R & Smith, J.L. (1987) "Valuing Offshore Oil Properties with Option Pricing Models", Midland Corporate Finance Journal, printemps, 22-30.

[29] Paddock, J.L. & Siegel, D.R & Smith, J.L. (1988) "Option Valuation of Claims on Real Assets : The Case of Offshore Petroleum Leases", Quarterly Journal of Economics, Août, 479-508.

[30] Pindyck, R.S. (1988) "Irreversible Investment, Capacity Choice and the Value of the Firm", American Economic review, 78, 969-985.

[31] Pindyck, R.S. (1991) "Irreversibility, Uncertainty and Investment", Journal of Economic Literature, 29, 1110-1152.

[32] Pindyck, R.S. (1993) "Investment of Uncertain Cost", Journal of Financial Economics, 34, 53-76.

[33] Rausser, Gordon.C. & Small, Arthur.A. (2000) "Valuing Research Leads : Bioprospecting and the Conservation of Genetic Resources", Journal of political Economy, 108(1), 173-206.

[34] Simpson, R.David. (1996) "Valuation of Biodiversity for Use in New Product Research in a Model of Sequential Search", Discussion Paper : 96/27. Washington, D.C. :Resource for the Future.

[35] Simpson, R.David & Sedjo, Roger.A. (1996) "Investment in Biodiversity prospecting and Incentives for Conservation", Discussion Paper : 96/14. Washington, D.C. :Resource for the Future.

[36] Simpson, R.David & Sedjo, Roger.A. & Reid, John.W. (1996) "Valuing Biodiversity for Use in Pharmaceutical Research", Journal of political Economy, 104(1), 163-85.

[37] Summers, Lawrence.H. (1987) "Investment Incentives and Discounting of Depreciation Allowances", In The Effects of Taxation on Capital Accumulation, ed. Martin Felstein. Chicago, IL : Chicago University Press.

[38] Swanson, Timothy. (1994) "The Economics of Extinction Revisited and Revised : A Generalised Framework for the Analysis of the Problems of Endangered Species and Biodiversity Losses", Oxford Economic Papers, 46, 800-821.

[39] Teisberg, Elisabeth.O. (1993) "Capital Investment Strategies under Uncertain Regulation", Rand Journal, 24(4), 591-604.

[40] Triantis, A.J. & Hodder, J.E. (1990) "Valuing Flexibility as a Complex Option", The Journal of Finance, XLV, 549-565.

[41] Trigeorgis, Lenos. (1993) "The Nature of options Interactions and the Vlauation of Investments with Multiple Real Options", Journal of Financial aand Quantitative Analysis, 28(1), 1-20.

[42] Weitzman, Martin.L. (1993) "What to preserve ? An Application of Diversity Theory to Crane Conservation", Quarterly Journal of Economics, 108(fev), 157-183.

[43] Weitzman, Martin.L. (1998) "The Noah Ark Problem", Econometrica, 66(6), 1279-1298.

[44] Wesseler, Justus. (1999) "Temporal Uncertainty and Irreversibility : A Theoretical Framework for the Decision to Approve the Release of Transgenic Crops", Transitions in Agbiotech : Economics of Strategy and Policy, eds. William H.Lesser.